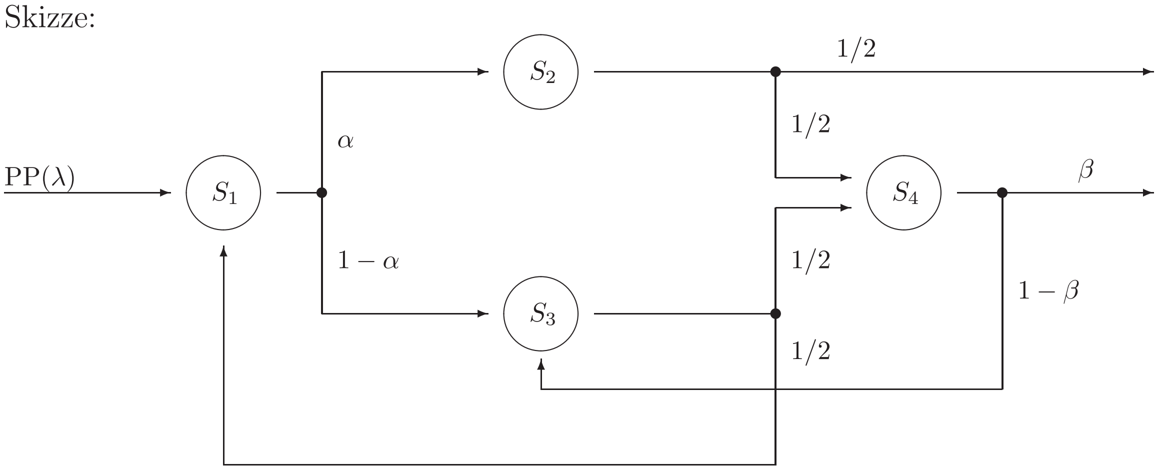
# Zusatzübung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Gernot Fabeck

18.2.2009, 17:00 Uhr, WSH 24 A 407

**Aufgabe 1.** Anforderungen kommen gemäß einem Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda$ am ersten Server $S_1$ eines Clusters an. Nach der Bearbeitung an diesem Server werden die Anforderungen mit Wahrscheinlichkeit $\alpha$ bzw. $1-\alpha$ an die Server $S_2$ bzw. $S_3$ weitergeleitet und dort bearbeitet. An Server $S_2$ wird das Ergebnis jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ fertig oder an Server $S_4$ weiter gegeben. Ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ werden bearbeitete Anforderungen von Server $S_3$ entweder an Server $S_1$ oder $S_4$ geleitet. Nach der Bearbeitung an Server $S_4$ werden die Anforderungen mit Wahrscheinlichkeit $\beta$ fertig und mit Wahrscheinlichkeit $1-\beta$ an Server $S_3$ zurückgeschickt. Die Server $S_1$ und $S_2$ sind jeweils durch M/M/$\infty$-Bediensysteme mit positiven Bedienraten $\mu_1$ und $\mu_2$ zu beschreiben, wohingegen die Server $S_3$ und $S_4$ durch M/M/1-Bediensysteme mit positiven Bedienraten $\mu_3$ und $\mu_4$ darzustellen sind.

Skizze:




Es seien zunächst $\lambda > 0$ und $\beta > 0$, es liege also ein offenes Jackson-Netz vor.

a) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix des offenen Jackson-Netzes an.

b) Wann existiert eine stationäre Verteilung und wie lautet diese?

c) Wie muss man die Bedienintensität $\mu_1$ wählen, damit im stationären Zustand die mittlere Zahl an Anforderungen an Server $S_1$ und $S_2$ gleich ist?

d) Wie muss man für $\alpha = 0$ die Bedienintensität $\mu_3$ wählen, damit im stationären Zustand die mittlere Gesamtverweilzeit an Server $S_3$ und $S_4$ gleich ist?

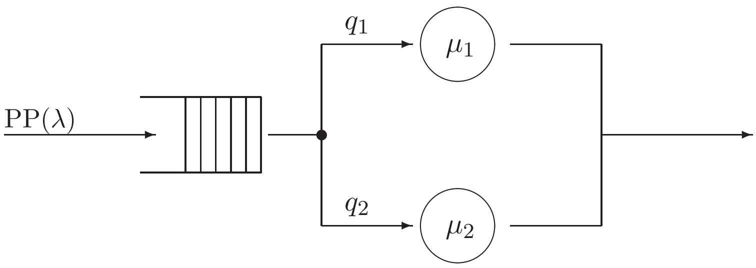
Nehmen Sie nun an, dass $\lambda = 0$ und $\alpha = \beta = 0$ gelten, es liege also ein geschlossenes Jackson-Netz vor. Ferner seien $\mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = 2$ und $\mu_3 = 1$. Es befinden sich $M$ Anforderungen im System.

e) Bestimmen Sie den Zustandsraum des geschlossenen Jackson-Netzes und seine Mächtigkeit.

f) Wie lautet für $M = 3$ die stationäre Verteilung? Benutzen Sie bei der Berechnung $\Lambda_1^* = 2$.

**Aufgabe 2.** Die Bearbeitung von Aufträgen an einem Server lasse sich durch ein $M/G/1$-Bediensystem mit hyperexponentialverteilter Bedienzeit $Y$ beschreiben, d.h. $Y \sim \mathrm{HrExp}(\mu_1, \mu_2, q_1, q_2)$. Es sei $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$ und $q_1 = 1 - q_2 = 1/4$. Der Ankunftsprozess sei ein Poisson-Prozess $\mathrm{PP}(\lambda)$ mit Intensität $\lambda = 1$.

Skizze:




a) Wie lautet der Erwartungswert $\nu = \mathrm{E}(Y)$ der Bedienzeit $Y$?

b) Berechnen Sie die mittlere Anzahl von Anforderungen im System im stationären Zustand $\mathrm{E}(X^*)$ und die mittlere Gesamtverweilzeit einer Anforderung im System im stationären Zustand $\mathrm{E}(W^*)$.

c) Wie lauten $\mathrm{E}(X^*)$ und $\mathrm{E}(W^*)$ für das $M/M/1$-System, welches den gleichen Erwartungswert der Bedienzeit wie das obige $M/G/1$-System besitzt?

d) Berechnen Sie die stationäre Verteilung des $M/G/1$-Systems.
**Hinweis:** Benutzen Sie, dass die erzeugende Funktion der stationären Verteilung folgende Gestalt hat:

$$H(z) = \frac{\frac{9}{32}}{1 - \frac{2}{3}z} + \frac{\frac{3}{32}}{1 - \frac{2}{5}z}.$$

e) Betrachten Sie nun ein $M/G/1/1$-System mit $Y \sim \mathrm{HrExp}(\mu_1, \mu_2, q_1, q_2)$ wie oben. Modellieren Sie dieses System als Markoff-Prozess indem Sie für den Zustandsraum

$$\mathcal{S} = \{(0,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1)\}$$

den Intensitätsgraphen und die Intensitätsmatrix angeben. Berechnen Sie die stationäre Verteilung des zugehörigen Markoff-Prozesses.