RWTH AACHEN UNIVERSITY
Lehrstuhl für Theoretische Informationstechnik

5. Übung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Gernot Fabeck, Michael Reyer

Abgabe am 21.5.2007 in der Vorlesung/Übung

Aufgabe 11. Ein Puffer besitze eine maximale Kapazität von r Paketen. Zu den Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}$ komme mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in [0, 1]$ ein neues Paket an. Falls der Puffer noch freie Kapazität aufweist, wird das Paket angenommen, ansonsten wird es abgewiesen. Entsprechend werde zu diesen Zeitpunkten mit Wahrscheinlicheit $\beta \in [0, 1]$ ein bereits im Puffer befindliches Paket weitergeschickt. Das Ankommen neuer und das Verschicken bereits im Puffer befindlicher Pakete sei stochastisch unabhängig. Es sei X_n die Anzahl der Pakete im Puffer zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ nach zufälligem Zu- und Abgang, $X_0 = s \leq r$.

a) Geben Sie Zustandsraum, Übergangsgraph und Übergangsmatrix der Markov-Kette $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ an.

b) Wie lauten die globalen Gleichgewichtsgleichungen?

c) Berechnen Sie für $r = 3$, $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ die stationäre Verteilung der Markov-Kette.

Aufgabe 12. Betrachten Sie einen homogenen Markov-Prozess $\{X_t\}_{t \geq 0}$ mit Zustandsraum $\mathcal{S} = \{1, 2\}$ und Intensitätsmatrix

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda, \mu \geq 0$ und $\lambda + \mu > 0$.

a) Bestimmen Sie $\boldsymbol{\Pi}(t)$.

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_t = 2 | X_0 = 1, X_{3t} = 1) \quad \text{und} \quad P(X_t = 2 | X_0 = 1, X_{3t} = 1, X_{4t} = 1).$$

c) Geben Sie den Intensitätsgraphen des Markov-Prozesses und den Übergangsgraphen der eingebetteten Markov-Kette an.

d) Berechnen Sie die stationäre Verteilung des Markov-Prozesses.

e) Was kann man über das asymptotische Verhalten der eingebetteten Markov-Kette sagen?