3. Übung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Gernot Fabeck
29.4.2008

Aufgabe 5. Die homogene Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ besitze die Übergangsmatrix

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

a) Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen der Markov-Kette.

b) Betrachten Sie die Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}(0) = (1, 0, 0)$. Berechnen Sie $\boldsymbol{p}(1)$ und $\boldsymbol{p}(2)$.

c) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung der Markov-Kette.

Aufgabe 6. Die Zufallsvariablen $Y_0, Y_1, Y_2, ...$ seien stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit $P(Y_i = 1) = p$ und $P(Y_i = -1) = 1 - p$. Ferner sei $X_n = 2Y_n + Y_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie den Zustandsraum und den Übergangsgraphen der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

Aufgabe 7. Auf einem Kanal werden übertragene Bits symmetrisch gestört, d.h. Einsen und Nullen werden mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gestört. Ist ein Bit fehlerfrei übertragen worden, so ist das darauf folgende Bit mit Wahrscheinlichkeit p_0 gestört. Ist ein Bit gestört übertragen worden, so ist das darauf folgende Bit mit Wahrscheinlichkeit p_1 nicht gestört.

a) Geben Sie ein geeignetes Markov-Modell zur Beschreibung des Übertragungskanals an.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist im stationären Zustand ein übertragenes Bit gestört?

Eine Gruppe aufeinander folgender gestörter Bits, die durch ungestörte Bits begrenzt wird, heißt *Störbüschel*.

c) Wie sieht die Verteilung der Zufallsvariablen Y aus, welche die Anzahl der gestörten Bits in einem Störbüschel beschreibt?

d) Wie groß ist die erwartete Anzahl gestörter Bits in einem Störbüschel?

Hinweis: Benutzen Sie, dass gilt $\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2$ für alle $|z| < 1$.