4. Übung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Gernot Fabeck

6.5.2008

Aufgabe 8. Die homogene Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschreibe die Anzahl der Tage, die am Tag n seit dem letzten Neustart eines Servers vergangen sind, dabei sei $X_1 = 0$. Ferner sei $0 < p_i < 1$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Neustart des Servers bis zum nächsten Tag, wenn der Server zuvor $i \in \mathbb{N}_0$ Tage ohne Neustart durchlief.

a) Geben Sie Übergangsgraph und Übergangsmatrix der obigen Markov-Kette an.

b) Weisen Sie nach, dass für den Fall $p_i \equiv p$ die Markov-Kette positiv-rekurrent ist. Geben Sie für diesen Fall die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung an.

c) Betrachten Sie den Fall unterschiedlicher p_i und weisen Sie nach, dass die Markov-Kette genau dann rekurrent ist, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$.

Hinweis: Es sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 < a_i < 1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Für die Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ mit $b_j = \prod_{i=1}^{j}(1 - a_i)$ gilt $\lim_{j\to\infty} b_j = 0$ genau dann, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \infty$.

Aufgabe 9. Ein Puffer besitze eine maximale Kapazität von r Paketen. Zu den Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}$ komme mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in [0, 1]$ ein neues Paket an. Falls der Puffer noch freie Kapazität aufweist, wird das Paket angenommen, ansonsten wird es abgewiesen. Entsprechend werde zu diesen Zeitpunkten mit Wahrscheinlicheit $\beta \in [0, 1]$ ein bereits im Puffer befindliches Paket weitergeschickt. Das Ankommen neuer und das Verschicken bereits im Puffer befindlicher Pakete sei stochastisch unabhängig. Es sei X_n die Anzahl der Pakete im Puffer zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ nach zufälligem Zu- und Abgang, $X_0 = s \le r$.

a) Geben Sie Zustandsraum, Übergangsgraph und Übergangsmatrix der Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

b) Wie lauten die globalen Gleichgewichtsgleichungen?

c) Berechnen Sie für $r = 3$, $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ die stationäre Verteilung der Markov-Kette.