5. Übung

Aufgabe 1 d)

(siehe Theorem 3.17, Skript)

stationäre Verteilung p^* ist Lösung von $pQ = 0$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

① $-\lambda p_1 + \mu p_2 = 0$

[② $\lambda p_1 - \mu p_2 = 0$] nicht hilfreich, da linear abhängig von ①

③ Normierung: $p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - p_1$ in ①: $-\lambda p_1 + \mu(1 - p_1) = 0$

$$p_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

$\Rightarrow$ stationäre Verteilung ist $p^* = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)$

5. Übung

Aufgabe 2

a) Intensitätsmatrix:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ \mu & 1 & -1-\mu \end{pmatrix}$$

(Die Diagonaleinträge ergeben sich aus der Bedingung
$$\forall i \in S: \sum_{j \in S} q_{ij} = 0.$$)

stationäre Verteilung p^* ist Lösung von $pQ = 0$.

[① $-p_1 + p_2 + \mu p_3 = 0$] linear abhängig von ② & ③

② $p_1 - 2p_2 + p_3 = 0$

③ $p_2 - (1+\mu)p_3 = 0 \Rightarrow p_2 = (1+\mu)p_3$

④ Normierung: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

③ in ②: $p_1 = 2(1+\mu)p_3 - p_3 = (1+2\mu)p_3$

in ④: $(1+2\mu)p_3 + (1+\mu)p_3 + p_3 = 1$

$$3(1+\mu)p_3 = 1$$

$$p_3 = \frac{1}{3(1+\mu)}, \quad p_2 = \frac{1}{3}, \quad p_1 = \frac{1+2\mu}{3(1+\mu)}$$

$$\Rightarrow p^* = \underline{\underline{\left(\frac{1+2\mu}{3(1+\mu)} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3(1+\mu)}\right)}}$$

5. Übung

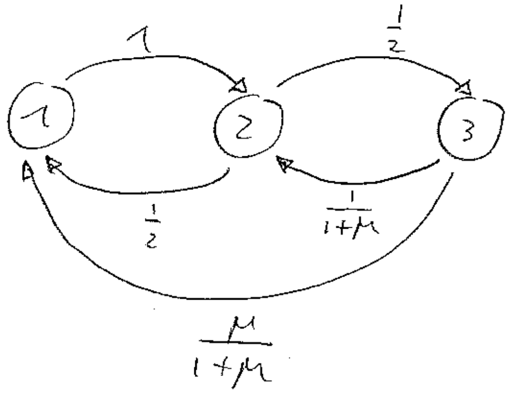
Aufgabe 2.b)

EMK:

Übergangsmatrix: $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\mu}{1+\mu} & \frac{1}{1+\mu} & 0 \end{pmatrix}$

(siehe Skript, Seite 25)

Übergangsgraph:



c) Stationäre Verteilung p^* von EMK ist Lösung von $p\Pi = p$

$$① \quad \tfrac{1}{2} p_2 + \tfrac{\mu}{1+\mu} p_3 = p_1$$

$$\left[② \quad p_1 + \tfrac{1}{1+\mu} p_3 = p_2 \right] \text{ linear abhängig von ① \& ③}$$

$$③ \quad \tfrac{1}{2} p_2 = p_3$$

$$① \quad -p_1 + \tfrac{1}{2} p_2 + \tfrac{\mu}{1+\mu} p_3 = 0$$

$$③ \quad \tfrac{1}{2} p_2 - p_3 = 0 \Rightarrow p_2 = 2 p_3$$

④ Normierung: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

③ in ④: $p_1 = 1 - 3p_3$

in ①: $-1 + 3p_3 + p_3 + \frac{\mu}{1+\mu} p_3 = 0$

$$\Rightarrow p_3 = \frac{1}{4 + \frac{\mu}{1+\mu}} = \frac{1+\mu}{4+5\mu}$$

$$p_2 = \frac{2+2\mu}{4+5\mu}$$

$$p_1 = 1 - \frac{3+3\mu}{4+5\mu} = \frac{1+2\mu}{4+5\mu}$$

$$\underline{\underline{p^* = \frac{1}{4+5\mu}(1+2\mu,\ 2+2\mu,\ 1+\mu)}}$$

5. Übung

Aufgabe 2 c) [Fortsetzung]

nach Theorem 3.18:

Verweilzeiten: 1 $\sim exp(1)$, 2 $\sim exp(2)$, 3 $\sim exp(1+\mu)$