4. Übung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Henning Maier, Gernot Fabeck
17.05.2010

Aufgabe 1. Gegeben sei ein kooperatives Relaynetzwerk, in dem einzelne Pakete von Station 1 nach Station 4 gesendet werden sollen. Je nachdem wie der Übertragungskanal zum Zeitschritt n beschaffen ist, sendet Station 1 das Paket mit der Wahrscheinlichkeit p_{12} an Station 2, mit Wahrscheinlichkeit p_{13} an Station 3 oder mit Wahrscheinlichkeit p_{14} direkt an Station 4. Die Relaystation 2 leitet das Paket mit p_{23} an Station 3 und mit p_{24} an Station 4 weiter. Die Relaystation 3 leitet das Paket mit p_{34} an Station 4 weiter. Eine einzelne Übertragung dauert einen Zeitschritt. Wenn das Paket sein Ziel erreicht hat, sendet Station 4 eine Bestätigung, welche einen ganzen Zeitschritt dauert, und Station 1 kann im nächsten Zeitschritt mit der Übertragung eines neuen Paketes beginnen. Für die Wahrscheinlichkeiten gilt: $p_{12} = \frac{1}{2}, p_{13} = \frac{1}{3}, p_{14} = \frac{1}{6}, p_{23} = \frac{3}{4}, p_{24} = \frac{1}{4}, p_{34} = 1, p_{41} = 1$.

a) Beschreiben Sie dieses System durch eine Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie den Zustandsraum, den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix an.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht ein Paket 1, 2, 3, 4 oder 5 Zeitschritte?

c) Wie lange dauert es im Mittel, bis Station 1 ein neues Paket übertragen kann?

d) Ist das System irreduzibel und ist es periodisch oder aperiodisch? Geben Sie die Perioden für jeden Zustand an.

e) Ist das System rekurrent oder transient? Begründen Sie!

f) Wie lautet, falls vorhanden, die stationäre Verteilung p_1^* an Station 1?

Aufgabe 2. Die homogene Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschreibe die Anzahl der Tage, die am Tag n seit dem letzten Neustart eines Servers vergangen sind, dabei sei $X_1 = 0$. Ferner sei $0 < p_i < 1$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Neustart des Servers bis zum nächsten Tag, wenn der Server zuvor $i \in \mathbb{N}_0$ Tage ohne Neustart durchlief.

a) Geben Sie Übergangsgraph und Übergangsmatrix der obigen Markov-Kette an.

b) Weisen Sie nach, dass für den Fall $p_i \equiv p$ die Markov-Kette positiv-rekurrent ist. Geben Sie für diesen Fall die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung an.

c) Betrachten Sie den Fall unterschiedlicher p_i und weisen Sie nach, dass die Markov-Kette genau dann rekurrent ist, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$.

Hinweis: Es sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 < a_i < 1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Für die Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ mit $b_j = \prod_{i=1}^{j}(1 - a_i)$ gilt $\lim_{j\to\infty} b_j = 0$ genau dann, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \infty$.