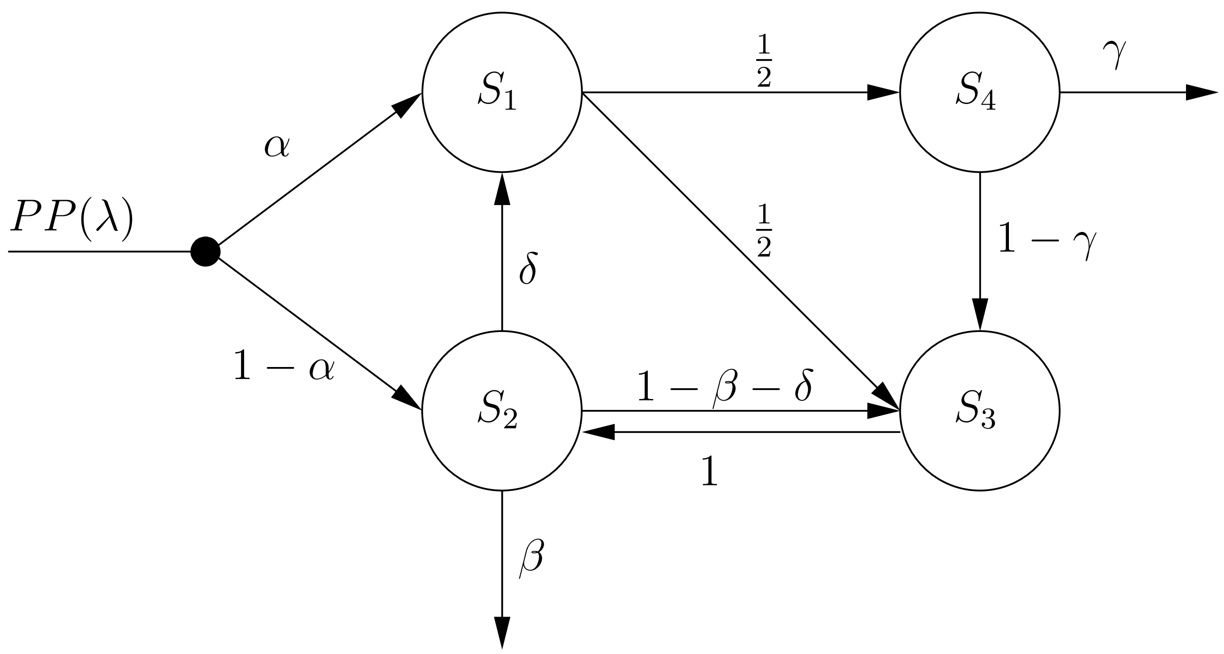
# Zusatzübung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Henning Maier, Gernot Fabeck

27.7.2010, WSH 407 A, 16 Uhr

**Aufgabe 1.** Anforderungen, die gemäß einem Poisson-Prozess mit Ankunftsrate $\lambda > 0$ an einem Server-Cluster ankommen, werden zunächst mit Wahrscheinlichkeit $\alpha$ Server $S_1$ und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1-\alpha$ Server $S_2$ zugeteilt und dort bedient. Nach der Bearbeitung an Server $S_1$ wird das Ergebnis jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ an Server $S_3$ bzw. $S_4$ weitergeleitet. Bei Server $S_2$ wird eine Anforderung nach ihrer Bearbeitung entweder mit Wahrscheinlichkeit $\delta$ an Server $S_1$ oder mit Wahrscheinlichkeit $1-\beta-\delta$ zu Server $S_3$ übergeben oder sie verlässt mit der Restwahrscheinlichkeit $\beta$ das System. Server $S_4$ schickt die Anforderungen nach ihrer Erledigung mit Wahrscheinlichkeit $1-\gamma$ an Server $S_3$ oder die Bearbeitung ist mit Gegenwahrscheinlichkeit $\gamma$ abgeschlossen. Für die Wahrscheinlichkeiten gelte $0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq 1$, $\beta \neq 0$ und $\beta+\delta \leq 1$. Die Server $S_1$, $S_2$ und $S_3$ werden durch $M/M/1$-Systeme und der Server $S_4$ als $M/M/\infty$-System modelliert. Die Anforderungen werden mit $\text{Exp}(\mu_i)$-verteilter Bedienzeit bearbeitet, $i = 1, \ldots, 4$. Alle Server arbeiten stochastisch unabhängig. Das System wird durch das folgende Warteschlangennetz beschrieben.




(a) Geben Sie ein Modell mit Zustandsraum und Routingmatrix an.

Sei nun $\delta = 0$.

(b) Unter welchen Bedingungen existiert eine stationäre Verteilung und wie lautet diese?

(c) Bestimmen Sie die erwartete Zahl an Anforderungen für Server $S_4$ im stationären Zustand.

(d) Wann ist der Fluss an den Servern $S_2$ und $S_3$ gleich groß?

(e) Bestimmen Sie eine Ungleichung für $\alpha$, die erfüllt sein muss, damit der Fluss an Server $S_1$ größer oder gleich dem Fluss an Server $S_2$ ist. Kann diese Ungleichung für $\alpha = 1/2$ erfüllt werden? Begründen Sie die Antwort.

Es gelte zusätzlich $\lambda = 2$, $\beta = \gamma = 1/2$, $\mu_1 = \mu_4 = 1$, $\mu_2 = 4$ und $\mu_3 = 3$.

(f) Für welche $\alpha$ existiert nun eine stationäre Verteilung?

(g) Für welche $\alpha$ existiert eine stationäre Verteilung, falls Server $S_1$ als $M/M/\infty$-System modelliert wird?

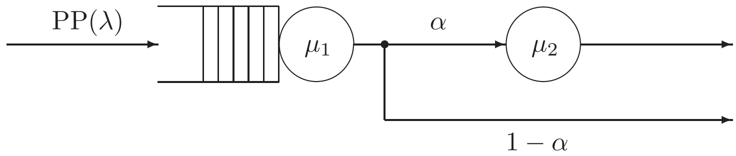
Nehmen Sie nun an, dass $\lambda = \beta = \gamma = 0$ und $\delta = 1/2$ gilt. Ferner seien $M$ Anforderungen im System, alle Stationen werden durch $M/M/1$-Systeme modelliert und es gelten die Bedienintensitäten von oben.

(h) Bestimmen Sie den Zustandsraum des geschlossenen Jacksonnetzes und seine Mächtigkeit.

(i) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Flussgleichung, für die $\Lambda_3^* = 4$ gilt.

(j) Wie lautet für $M = 3$ die stationäre Verteilung?

(k) Wie hoch ist die erwartete Zahl an Anforderungen für die Server $S_2$ und $S_4$?




**Aufgabe 2.**

An einem Tandem-Server treffen Anforderungen gemäß einem Poisson-Prozess PP($\lambda$) ein. Eine Anforderung wird in Server 1 mit Exp($\mu_1$)-verteilter Bedienzeit bearbeitet, falls Server 1 und Server 2 frei sind. Ist einer der Server beschäftigt, kommt die Anforderung in eine Warteschlange mit unendlich vielen Plätzen. Die in Server 1 abgearbeitete Anforderung wird mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in [0,1]$ zwecks Nachbearbeitung zu Server 2 weitergeleitet und dort mit Exp($\mu_2$)-verteilter Bedienzeit abgearbeitet. Es gelte $\lambda, \mu_1, \mu_2 > 0$ und der Ankunftsprozess und die Bedienzeiten der beiden Server seien stochastisch unabhängig.

(a) Welcher Typ von Bediensystem modelliert diesen Tandem-Server und wie lautet die Verteilung der Bedienzeit $Y$?

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Bedienzeit $Y$.

(c) Welche Bedingung muss für $\alpha$ gelten, damit der Tandem-Server eine stationäre Verteilung besitzt?

(d) Berechnen Sie für $\lambda = \frac{4}{3}$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 5$ und $\alpha = \frac{5}{6}$ die mittlere Anzahl und die mittlere Gesamtverweilzeit von Anforderungen im Tandem-Server im stationären Zustand.

(e) Berechnen Sie für $\lambda = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ die stationäre Verteilung des Tandem-Servers. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Tandem-Server im stationären Zustand leer ist?
**Hinweis:** Bringen Sie die erzeugende Funktion der stationären Verteilung auf die Form

$$H(z) = \frac{a}{z-b} + \frac{c}{z-d}.$$