3. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz

9.5.2011

Aufgabe 1. Es sei $\mathbf{\Pi}$ die Übergangsmatrix einer homogenen Markov-Kette, dann können die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$ nach Proposition 3.3 c) als

$$p_{ij}^{(n)} = (\mathbf{\Pi}^n)_{ij}$$

ausgedrückt werden, wobei $i, j \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}$ sein müssen. Zeigen Sie basierend darauf die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* [Propositon 3.3 d)]

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{l \in \mathcal{S}} p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)}$$

für $i, j \in \mathcal{S}$ und $n, m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. Es sei

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix der Markov-Kette aus Beispiel 3.4 (Satellitenkanal), wobei $\alpha + \beta > 0$ sei. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ per vollständiger Induktion

$$\mathbf{\Pi}^n = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix},$$

und daraus

$$\boldsymbol{p}(n) = \frac{1}{\alpha+\beta}(\beta, \alpha) + \frac{(1-\alpha-\beta)^n (p_1\alpha - p_2\beta)}{\alpha+\beta}(1, -1)$$

für eine beliebige Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}(0) = (p_1, p_2)$.