1. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Dr. Michael Reyer

23.4.2012

Aufgabe 1. Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Träger $\mathbb{N}_0$ und Zähldichte $P(X = k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Die Funktionen $Q_X(z) : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $R_X(z) : [0,1] \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$Q_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) z^k \quad \text{und} \quad R_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X \leq k) z^k.$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

a) $P(X > k) = \frac{1}{k!} Q_X^{(k)}(0)$ und $P(X \leq k) = \frac{1}{k!} R_X^{(k)}(0)$,

b) $R_X(z)(1 - z) = G_X(z)$ und $Q_X(z)(1 - z) = 1 - G_X(z)$.

Aufgabe 2. Gegeben seien zwei diskrete, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X, Y, die jeweils $X \sim \mathsf{Geo(p)}$ und $Y \sim \mathsf{Poi}(\lambda)$ mit den Parametern $0 < p < 1$ und $\lambda > 0$ verteilt sind. Berechne im Folgenden:

a) die erzeugenden Funktionen der beiden Zufallsvariablen X, Y und

b) für die Summe $Z = X + Y$ die Wahrscheinlichkeit $P(Z = 1)$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für die erzeugende Funktion $G_X(z)$ einer negativ-binomialverteilten Zufallsvariable $X \sim \overline{\text{Bin}}(r, p)$ mit $r \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$ gilt

$$G_X(z) = \left(\frac{p}{1 - (1 - p)z} \right)^r, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass $\overline{\text{Bin}}(r, p) = \underbrace{\text{Geo}(p) * \ldots * \text{Geo}(p)}_{r-mal}$.