2. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Dr. Michael Reyer

30.4.2012

Aufgabe 1. Bei Ethernet nach IEEE 802.3 wird ein exponentieller Backoff-Algorithmus zur Auflösung von Kollisionen verwendet. Bevor ein Rechner mit der Datenübertragung beginnt, überprüft er zunächst, ob gerade kein anderer Rechner überträgt. Ist die Leitung frei, so wird sofort mit der Übertragung begonnen. Ist die Leitung jedoch belegt, so wird eine zufällige Zeit $T_1 \sim \mathrm{R}(0, t)$ gewartet. Der Parameter $t > 0$ sei fest vorgegeben. Falls die Leitung nach der Wartezeit noch belegt ist, so wird erneut eine zufällige Zeit gewartet. Dieses wird maximal n mal wiederholt. Die Wartezeit nach dem i-ten Versuch sei verteilt gemäß $T_i \sim \mathrm{R}(0, t \cdot 2^{i-1})$, $i = 1, \dots, n$.
In jedem Versuch sei der Kanal mit Wahrscheinlichkeit p belegt und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ frei. Der Backoff-Algorithmus wird entweder beendet, nachdem der Kanal frei ist und die Daten übertragen werden können oder nach dem n-ten Versuch mit einer Fehlermeldung, wenn der Kanal auch dann nicht frei ist.

a) Charakterisieren Sie die Verteilung der Zeit W, die angibt, wann der Backoff-Algorithmus beendet wird, durch die zugehörige Laplace-Transformierte. Nehmen Sie dabei an, dass der Kanal belegt ist, wenn der Rechner zum Zeitpunkt Null seine Übertragung beginnen will, d.h., es wird zu Beginn auf jeden Fall die Zeit T_1 gewartet.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von W.

c) Welche erwartete Wartezeit ergibt sich, wenn der Kanal zu Beginn der Übertragung nur mit Wahrscheinlichkeit p belegt ist?

d) Welche Verteilung ergibt sich, wenn die Wartezeiten T_i gemäß einer Exponentialverteilung mit mittleren Wartezeiten wie oben gewählt werden?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist, d.h. dass für eine Exp(λ)-verteilte Zufallsvariable X und für beliebige $s, t \geq 0$ gilt

$$P(X \leq s + t | X > t) = P(X \leq s) = 1 - e^{-\lambda s}.$$

Anschaulich bedeutet dies: Ist bei einer exponentialverteilten Wartezeit X die Zeit t bereits verstrichen, so ist die Restwartezeit genauso verteilt wie X selbst.

Aufgabe 3. Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_k$ seien stochastisch unabhängig exponentialverteilt mit den Parametern $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$, also $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i), 1 \leq i \leq k$.

a) Zeigen Sie, dass das Minimum $Y = \min\{X_1, \dots, X_k\}$ ebenfalls exponentialverteilt ist mit dem Parameter $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

b) Zeigen Sie, dass

$$P(X_i = Y) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}$$

für $1 \leq i \leq k$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zufallsvariable X_i das Minimum Y darstellt, ist also der Quotient aus dem Parameter λ_i und der Summe aller Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.