5. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Dr. Michael Reyer

21.5.2012

Aufgabe 1. Ein Puffer besitze eine maximale Kapazität von r Paketen. Zu den Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}$ komme mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in [0,1]$ ein neues Paket an. Falls der Puffer noch freie Kapazität aufweist, wird das Paket angenommen, ansonsten wird es abgewiesen. Nach der Ankunft werde noch zum selben Zeitpunkt mit Wahrscheinlicheit $\beta \in [0,1]$ ein bereits im Puffer befindliches Paket weitergeschickt. Das Ankommen neuer und das Verschicken bereits im Puffer befindlicher Pakete sei stochastisch unabhängig. Es sei X_n die Anzahl der Pakete im Puffer zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ nach zufälligem Zu- und Abgang, $X_0 = s \leq r$.

a) Geben Sie Zustandsraum, Übergangsgraph und Übergangsmatrix der Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

b) Wie lauten die globalen Gleichgewichtsgleichungen?

Seien nun $r = 3$ und $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$.

c) Berechnen Sie die stationäre Verteilung der Markov-Kette.

Nehmen Sie nun an, dass zunächst der Abgang und dann der Zugang von Paketen bearbeitet wird.

d) Wird die mittlere Anzahl an Paketen im System steigen, sinken oder gleich bleiben?

e) Rechnen Sie die mittlere Anzahl an Paketen für beide Bearbeitungsreihenfolgen aus.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbf{\Pi}(t)$ die Übergangsmatrix eines homogenen Markov-Prozesses $(X_t)_{t\geq 0}$mit Zustandsraum $\mathcal{S}$, d.h. es ist

$$P(X_{s+t} = j | X_s = i) = (\mathbf{\Pi}(t))_{ij}$$

für alle $s, t \geq 0$, $i, j \in \mathcal{S}$.

a) Zeigen Sie, dass für $t \geq 0$ die Verteilung $\boldsymbol{p}(t)$ von X_t als

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{\Pi}(t)$$

aus der Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}(0)$ von X_0 berechnet werden kann.

b) Zeigen Sie für $r, t \geq 0$ die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* für Markov-Prozesse

$$\mathbf{\Pi}(r + t) = \mathbf{\Pi}(r) \cdot \mathbf{\Pi}(t).$$