6. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Dr. Michael Reyer

4.6.2012

Aufgabe 1. Betrachten Sie einen homogenen Markov-Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Zustandsraum $\mathcal{S} = \{1, 2\}$ und Intensitätsmatrix

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda, \mu \geq 0$ und $\lambda + \mu > 0$.

a) Bestimmen Sie $\mathbf{\Pi}(t)$.

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus **a)** die Wahrscheinlichkeiten

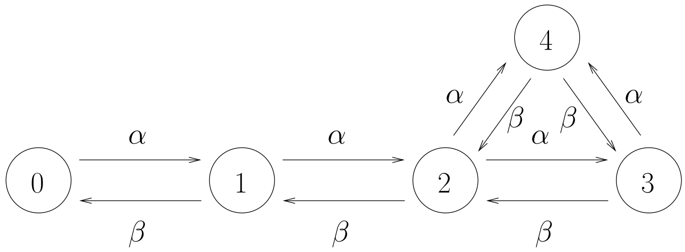
$$P(X_t = 2 | X_0 = 1, X_{3t} = 1) \quad \text{und} \quad P(X_t = 2 | X_0 = 1, X_{3t} = 1, X_{4t} = 1).$$

c) Geben Sie den Intensitätsgraphen des Markov-Prozesses und den Übergangsgraphen der eingebetteten Markov-Kette an.

d) Berechnen Sie die stationäre Verteilung des Markov-Prozesses.

e) Was kann man über das asymptotische Verhalten der eingebetteten Markov-Kette sagen?

Aufgabe 2. Betrachten Sie zunächst den folgenden Intensitätsgraphen eines Markov-Prozesses mit den Intensitäten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.



a) Geben Sie für den abgebildeten Markov-Prozess den Zustandsraum und die Intensitätsmatrix an.

b) Berechnen Sie die Übergangsmatrix der eingebetteten Markov-Kette und zeichnen Sie den Übergangsgraphen.

c) Berechnen Sie die Zustandswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markov-Kette mit der Anfangsverteilung $p_0(0) = 1$ nach $n = 1, 2, 3$ Zeitschritten.

d) Ist die eingebettete Markov-Kette reduzibel oder irreduzibel, rekurrent oder transient, und ist sie periodisch oder aperiodisch? Begründen Sie Ihre jeweilige Zuordnung.

e) Berechnen Sie die stationäre Verteilung des Markov-Prozesses für $\alpha = 1$ und $\beta = 2$.