4. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Dr. Michael Reyer, Dipl.-Inform. Florian Schröder

13.5.2013

Aufgabe 1. Die homogene Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschreibe die Anzahl der Tage, die am Tag n seit dem letzten Neustart eines Servers vergangen sind, dabei sei $X_1 = 0$. Ferner sei $0 < p_i < 1$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Neustart des Servers bis zum nächsten Tag, wenn der Server zuvor $i \in \mathbb{N}_0$ Tage ohne Neustart durchlief.

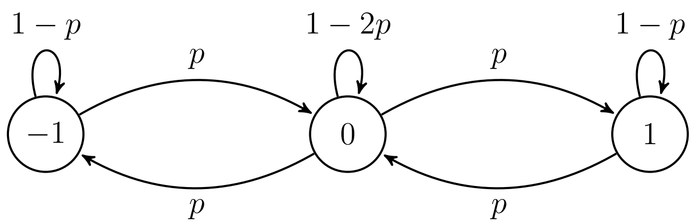
a) Geben Sie Übergangsgraph und Übergangsmatrix der obigen Markov-Kette an.

b) Weisen Sie nach, dass für den Fall $p_i \equiv p$ die Markov-Kette positiv-rekurrent ist. Geben Sie für diesen Fall die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung an.

c) Betrachten Sie den Fall unterschiedlicher p_i und weisen Sie nach, dass die Markov-Kette genau dann rekurrent ist, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$ gilt.

Hinweis: Es sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 < a_i < 1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Für die Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ mit $b_j = \prod_{i=1}^{j}(1 - a_i)$ gilt $\lim_{j\to\infty} b_j = 0$ genau dann, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \infty$.

Aufgabe 2. Die durch folgenden Übergangsgraphen beschriebene Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ modelliert einen Random-Walk auf drei Positionen.



Dabei ist $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$.

a) Geben Sie den Zustandsraum und die Übergangsmatrix $\mathbf{\Pi}$ der Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

b) Für welche p, $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$, ist die Markov-Kette irreduzibel, für welche aperiodisch?

c) Bestimmen Sie $\boldsymbol{p}(n)$ für die Ausgangsverteilung $\boldsymbol{p}(0) = (1, 0, 0)$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

d) Bestimmen Sie, falls vorhanden, die stationäre Verteilung der Markov-Kette für beliebiges $\boldsymbol{p}(0)$ und $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3. Es sei $\mathbf{\Pi}$ die Übergangsmatrix einer homogenen Markov-Kette, dann können die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)} = \mathrm{P}(X_n = j | X_0 = i)$ nach Proposition 3.3 c) als

$$p_{ij}^{(n)} = (\mathbf{\Pi}^n)_{ij}$$

ausgedrückt werden, wobei $i, j \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}$ sein müssen. Zeigen Sie basierend darauf die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* [Proposition 3.3 d)]

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{l \in \mathcal{S}} p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)}$$

für $i, j \in \mathcal{S}$ und $n, m \in \mathbb{N}$.