7. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Dr. Michael Reyer, Dipl.-Inform. Florian Schröder

10.6.2013

Aufgabe 1. Das ALOHA-Protokoll wurde 1971 für das ALOHAnet als einfaches Protokoll zur Zugriffssteuerung auf ein gemeinsames Übertragungsmedium entwickelt und bildete später die Grundlage für das Ethernet-Protokoll.
Beim reinen ALOHA kann jeder Teilnehmer zu einem beliebigen Zeitpunkt ein Datenpaket konstanter Länge verschicken. Überlappt sich die Übertragung von Paketen unterschiedlicher Teilnehmer, so kollidieren diese Pakete und zerstören sich. Nach einer zufälligen Wartezeit können Pakete erneut versendet werden.
Betrachten Sie ein Netz mit k Stationen und nehmen Sie dabei an, dass jede Station ihre Pakete gemäß eines Poisson-Prozesses mit Parameter $\lambda > 0$ versendet. An einer Station sei die Zeit zwischen der Übertragung zweier Pakete also $\text{Exp}(\lambda)$-verteilt, unabhängig davon, ob das vorhergehende Paket zerstört wurde oder nicht (in diesem Modell wird zugelassen, dass eine Station ihr eigenes Paket zerstören kann). Jedes Paket sei genau eine Zeiteinheit lang.

a) Geben Sie den Parameter λ_{tot} des Poisson-Prozesses N_t an, der die Anzahl sämtlicher versendeter Pakete von allen k Stationen beschreibt.

b) Die Zufallsvariable $Q_n \sim \text{Bin}(1, p)$, $n \in \mathbb{N}$, habe den Wert Eins, falls das n-te Paket erfolgreich übertragen wird, und den Wert Null, falls es zerstört wird, da es mit dem $(n-1)$-ten oder dem $(n+1)$-ten Paket überlappt. Bestimmen Sie p als Funktion von λ_{tot}. Gehen Sie davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Übertragung des 0-ten Pakets beginnt.

c) Berechnen Sie die erwartete Anzahl nicht zerstörter Pakete bis zum Zeitpunkt $t > 0$ einschließlich des nächsten, also $\text{E}(\sum_{n=1}^{N_t+1} Q_n)$, als Funktion von λ_{tot}. Zählen Sie dabei das 0-te Paket nicht mit und nutzen Sie den unten angegebenen Hinweis. Bestimmen Sie weiterhin den Durchsatz des Kanals, also die erwartete Anzahl nicht zerstörter Pakete pro Zeiteinheit

$$d_{\text{ALOHA}}(\lambda_{\text{tot}}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \text{E(Anzahl nicht zerstörter Pakete bis zum Zeitpunkt } t)$$

Wie groß ist der maximale Durchsatz und für welchen Wert von λ wird er angenommen?

d) Als Alternative zu ALOHA wurde slotted ALOHA vorgeschlagen. Dabei darf die Übertragung eines Pakets nur zu vorgegebenen Zeitpunkten $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ beginnen. Welcher Durchsatz ergibt sich für slotted ALOHA, wenn die Übertragungswahrscheinlichkeit q für jede Station in jedem Slot so gewählt wird, dass die erwartete Anzahl gesendeter Pakete pro Station und pro Slot dem Wert für ALOHA entspricht, also $q = \lambda_{\text{tot}}/k$, wobei $\lambda_{\text{tot}}/k < 1$. Geben Sie den Durchsatz $d_{\text{SALOHA}}(\lambda_{\text{tot}})$ von slotted ALOHA für festes k und im Grenzwert $k \to \infty$ an.

e) Vergleichen Sie den Durchsatz von ALOHA mit dem von slotted ALOHA im Grenzwert $k \to \infty$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass für die oben eingeführten Größen gilt

$$\mathrm{E}(\sum_{n=1}^{N_t+1} Q_n) = \mathrm{E}(N_t + 1) \cdot \mathrm{E}(Q_1).$$

Aufgabe 2. Bei ATM werden Daten in Zellen (Paketen) fester Größe übertragen. Jede Zelle enthält 5 Byte Header und 48 Byte Nutzdaten. Nehmen Sie an, dass Daten byteweise gemäß einem Poisson-Prozess mit Parameter $\lambda = 10/\text{ms}$ erzeugt werden. Eine Zelle wird verschickt, sobald 48 Byte Daten zum Versenden bereit stehen. Bestimmen Sie die Verteilung, welche die Zeiten zwischen dem Versenden der einzelnen Zellen beschreibt. Wie ist deren Erwartungswert und deren Varianz? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurden nach 20 ms mindestens 5 Zellen gesendet? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurden nach 20 ms genau 5 Zellen gesendet?

Aufgabe 3. Es sei $\{N_t\}_{t \geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ und Anfangszustand $N_0 = 0$. Zeigen Sie, dass für $0 < s < t$ und $i \leq j$ mit $i, j \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathrm{P}(N_s = i \mid N_t = j) = \binom{j}{i} \left(\frac{s}{t}\right)^i \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{j-i}.$$