8. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Dr. Michael Reyer, Dipl.-Inform. Florian Schröder

17.6.2013

Aufgabe 1. An einem Tandem-Server treffen Anforderungen gemäß einem PP(λ) ein, $\lambda > 0$. Eine Anforderung wird in Server 1 mit Exp(μ_1)-verteilter Bedienzeit bearbeitet, falls der Server 1 frei ist, $\mu_1 > 0$. Ist der Server 1 beschäftigt, geht die Anforderung verloren. Die in Server 1 abgearbeitete Anforderung wird zu Server 2 weitergeleitet, falls dieser frei ist, und dort mit Exp(μ_2)-verteilter Bedienzeit abgearbeitet, $\mu_2 > 0$. Server 1 ist blockiert, falls Server 2 beschäftigt ist und sich eine abgearbeitete Anforderung in Server 1 befindet. Bei Blockierung gehen ankommende Anforderungen ebenfalls verloren. Der Ankunftsprozess und die Bedienzeiten der beiden Server seien stochastisch unabhängig.

a) Geben Sie einen geeigneten Markov-Prozess für das beschriebene System an, d.h., den Intensitätsgraphen und die Intensitätsmatrix.
Hinweis: Ein geeigneter Zustandsraum ist

$$\mathcal{S} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (b,1)\},$$

wobei $0/1/b$ bedeutet, dass der entsprechende Server frei/beschäftigt/blockiert ist.

b) Berechnen Sie die stationäre Verteilung.

Aufgabe 2. Ein Supermarkt verspricht seinen Kunden im Rahmen einer Zufriedenheitsgarantie, dass nie mehr als zwei Kunden in der Warteschlange vor der Kasse warten. Um dies zu gewährleisten, wird sofort eine weitere Kasse geöffnet, wenn die Warteschlange vor einer Kasse mehr als zwei Kunden enthält und dies auch durch Umverteilen der Kunden auf andere Warteschlangen der schon geöffneten Kassen nicht abgewendet werden kann.

a) Modellieren Sie den Kassenbereich des Supermarktes als Geburts- und Todesprozess (GTP). Der Ankunftsprozess der Kunden, die mit ihren gefüllten Einkaufswagen auf die Kassen zuströmen, soll dabei als Poissonprozess mit Intensität λ angenommen werden. Da das Umverteilen der Kunden zwischen den verschiedenen Warteschlangen schlecht zu modellieren ist, wird eine zentrale Warteschlange verwendet. Die Zufriedenheitsgarantie lautet dann sinngemäß, dass bei k geöffneten Kassen höchstens $2k$ Kunden in der Zentralwarteschlange warten dürfen. Die jeweiligen Bedienzeiten der einzelnen Kunden an den Kassen seien stochastisch unabhängig Exp(μ)-verteilt.

Leider ist in der Praxis nur eine endliche Anzahl von Kassen verfügbar, diese wird im Folgenden mit K bezeichnet. Es kann also vorkommen, dass die Zufriedenheitsgarantie nicht eingehalten werden kann, weil keine weiteren Kassen geöffnet werden können.

b) Wie kann diese Einschränkung in dem zuvor entwickelten Modell berücksichtigt werden? Berechnen Sie für $\lambda = 4$, $\mu = 2$ und $K = 3$ den stationären Zustand des GTP? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufriedenheitsgarantie nicht eingehalten wird? Wieviele Kunden befinden sich im Durchschnitt in der Zentralwarteschlange, und wieviele Kassen sind geöffnet?

c) Eine neue Vorgabe der Konzernzentrale besagt, dass die Zufriedenheitsgarantie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% eingehalten werden muss. Dazu soll die Strategie, ab wann jeweils eine weitere Kasse geöffnet wird, wenn nötig modifiziert werden. Ist es in der hier betrachteten Filiale mit $K = 3$ Kassen möglich, die Vorgabe durch eine solche Strategieänderung zu erfüllen?

Aufgabe 3. Betrachten Sie ein $M/M/1/\infty$-System mit Ankunftsintensität λ und Bedienintensität μ, wobei die Auslastung $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ sei.

a) Berechnen Sie für den stationären Zustand die Dichte der Verteilung der Zeiten zwischen zwei Abgängen.

b) Um was für einen Prozess handelt es sich?