Prof. Dr. Anke Schmeink, Michael Reyer, Christopher Schnelling

Übung 4

Montag, 09. Mai 2016

Aufgabe 1. Gegeben sei ein kooperatives Relaynetzwerk, in dem einzelne Pakete von Station 1 nach Station 4 gesendet werden sollen. Je nachdem wie der Übertragungskanal zum Zeitschritt n beschaffen ist, sendet Station 1 das Paket mit der Wahrscheinlichkeit p_{12} an Station 2, mit Wahrscheinlichkeit p_{13} an Station 3 oder mit Wahrscheinlichkeit p_{14} direkt an Station 4. Die Relaystation 2 leitet das Paket mit p_{23} an Station 3 und mit p_{24} an Station 4 weiter. Die Relaystation 3 leitet das Paket mit p_{34} an Station 4 weiter. Eine einzelne Übertragung dauert einen Zeitschritt. Wenn das Paket sein Ziel erreicht hat, sendet Station 4 eine Bestätigung, welche einen ganzen Zeitschritt dauert, und Station 1 kann im nächsten Zeitschritt mit der Übertragung eines neuen Paketes beginnen. Für die Wahrscheinlichkeiten gilt: $p_{12} = \frac{1}{2}, p_{13} = \frac{1}{3}, p_{14} = \frac{1}{6}, p_{23} = \frac{3}{4}, p_{24} = \frac{1}{4}, p_{34} = 1, p_{41} = 1$.

a) Beschreiben Sie dieses System durch eine Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie den Zustandsraum, den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix an.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht ein Paket 1, 2, 3, 4 oder 5 Zeitschritte?

c) Wie lange dauert es im Mittel, bis Station 1 ein neues Paket übertragen kann?

d) Ist das System irreduzibel und ist es periodisch oder aperiodisch? Geben Sie die Perioden für jeden Zustand an.

e) Ist das System rekurrent oder transient? Begründen Sie!

f) Wie lautet, falls vorhanden, die stationäre Verteilung p_1^* an Station 1?

Aufgabe 2. Es sei $\mathbf{\Pi}(t)$ die Übergangsmatrix eines homogenen Markov-Prozesses $(X_t)_{t\geq 0}$mit Zustandsraum $\mathcal{S}$, d. h. es ist

$$P(X_{s+t} = j \mid X_s = i) = (\mathbf{\Pi}(t))_{ij}$$

für alle $s, t \geq 0$, $i, j \in \mathcal{S}$.

a) Zeigen Sie, dass für $t \geq 0$ die Verteilung $\boldsymbol{p}(t)$ von X_t als

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{\Pi}(t)$$

aus der Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}(0)$ von X_0 berechnet werden kann.

b) Zeigen Sie für $r, t \geq 0$ die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* für Markov-Prozesse

$$\mathbf{\Pi}(r+t) = \mathbf{\Pi}(r) \cdot \mathbf{\Pi}(t).$$