Prof. Dr. Anke Schmeink, Michael Reyer, Christopher Schnelling

Übung 3

Montag, 22. Mai 2017

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{S}$ ein unendlicher, aber abzählbarer Zustandsraum, und seien $\boldsymbol{\Pi} = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ und $\boldsymbol{\Phi} = (q_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ stochastische Matrizen und $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i\in\mathcal{S}}$ ein stochastischer Vektor.

a) Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \mathcal{S}$ die Reihen

$$\sum_{l\in\mathcal{S}} p_{il} q_{lj} \qquad \text{und} \qquad \sum_{l\in\mathcal{S}} v_l p_{lj}$$

konvergieren.

b) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{\Pi\Phi}$ mit

$$(\boldsymbol{\Pi\Phi})_{ij} = \sum_{l\in\mathcal{S}} p_{il} q_{lj}$$

wieder eine stochastische Matrix ist, und dass $\boldsymbol{v\Pi}$ mit

$$(\boldsymbol{v\Pi})_j = \sum_{l\in\mathcal{S}} v_l p_{lj}$$

ein stochastischer Vektor ist.

c) Zeigen Sie, dass allgemein (auch für endlichen Zustandsraum) gilt: Existiert

$$\boldsymbol{p}^* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}(n)$$

unabhängig von der Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}(0)$, so ist $\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{p}^*$. Eine Grenzverteilung ist also, wenn sie existiert, stets auch eine stationäre Verteilung.

Aufgabe 2. Es sei $\boldsymbol{\Pi}$ die Übergangsmatrix einer homogenen Markov-Kette, dann können die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$ nach Proposition 3.3 c) als

$$p_{ij}^{(n)} = (\boldsymbol{\Pi}^n)_{ij}$$

ausgedrückt werden, wobei $i, j \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}$ sein müssen. Zeigen Sie basierend darauf die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* [Proposition 3.3 d)]

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{l\in\mathcal{S}} p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)}$$

für $i, j \in \mathcal{S}$ und $n, m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Es sei $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\gamma = \alpha + \beta > 0$ und

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix der Markov-Kette aus Beispiel 3.4 (Satellitenkanal). Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ per vollständiger Induktion

$$\mathbf{\Pi}^n = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\gamma)^n}{\gamma}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix},$$

und daraus

$$\boldsymbol{p}(n) = \frac{1}{\gamma}(\beta, \alpha) + \frac{(1-\gamma)^n(p_1\alpha - p_2\beta)}{\gamma}(1, -1)$$

für eine beliebige Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}(0) = (p_1, p_2)$.