10. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

16.01.2009

Aufgabe 1. (KKT-Bedingungen und optimale Lösungen) Für das Optimierungsproblem

$$\min \quad -x_1 - \alpha x_2 - x_3$$

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{s.d.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & \beta \\ & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & \leq & 1 \end{array}$$

mit Variable $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3_{\geq 0}$ und Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelte starke Dualität.

i) Lassen sich Konstanten α und β finden, sodass $\tilde{\boldsymbol{x}} = (2, 1/4, 1/4)^T$ eine Optimalstelle des Problems ist?

ii) Zeigen Sie, dass $\alpha = 2$ und $\beta \geq 3$ gelten muss, falls $\tilde{\boldsymbol{x}} = (2, 1, 0)^T$ eine Optimalstelle des Problems ist.

Hinweis: Für jedes Optimierungsproblem mit differenzierbaren Ziel- und Nebenbedingungsfunktionen sowie Dualitätslücke 0 sind die KKT-Bedingungen notwendig für alle Optimalstellen.

Aufgabe 2. (KKT-Bedingungen und Verifikation der Optimalstelle) Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rl} \min & \operatorname{tr}(\boldsymbol{X}) - \log\det \boldsymbol{X} \\ \text{s.d.} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{y} \end{array}$$

mit Variable $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symmetrisch und positiv definit, sowie Parametern $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{y} = 1$.

i) Stellen Sie die KKT-Bedingungen für das Problem auf.

ii) Verifizieren Sie über die KKT-Bedingungen, dass

$$\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T - \frac{1}{\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T$$

Optimalstelle des Problems ist, wobei $\boldsymbol{I}_n$ die $n-$dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.