11. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

23.01.2009

Aufgabe 1. (Ratenmaximierung in Einbenutzer-OFDM-Systemen) In einem OFDM-System stehen für einen Nutzer $N \in \mathbb{N}$ Unterträger zur Verfügung, auf denen er mit den Raten $r_n \geq 0,\ n = 1, \dots, N$, Daten übertragen kann. Abhängig vom jeweiligen Kanalzustand $G_n > 0$ beträgt die Rate im $n-$ten Unterträger unter der Annahme eines rellen *AWGN-Kanals* bei Leistung $p_n \geq 0$

$$r_n = \frac{1}{2} \operatorname{ld}(1 + p_n G_n) \ .$$

Ziel der Ratenmaximierung ist die Auswahl eines Leistungsvektors $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_N)^T$, sodass die Gesamtrate, die sich additiv aus den Raten in den einzelnen Unterträgern zusammensetzt, unter Einhaltung der maximal zulässigen Gesamtleistung $P > 0$ maximal ist.

i) Formulieren Sie das Problem der Ratenmaximierung als konvexes Optimierungsproblem in Standardform.

ii) Bestimmen Sie über die KKT-Bedingungen die Anforderungen an primal und dual optimale Lösungspaare $(\boldsymbol{p}^*, \lambda^*)$.

Aufgabe 2. (Minimierung einer gebrochen-quadratisch-linearen Funktion) Es wird die Minimierung der Funktion $f : \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \|_2^2}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d}$$

zu gegebenen Parametern $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n,\ d \in \mathbb{R}$ betrachtet, wobei $\boldsymbol{A}$ vollen Rang besitzt und $\boldsymbol{b}$ nicht im Bildbereich von $\boldsymbol{A}$ liegt.

i) Entscheiden und begründen Sie, ob der Bildbereich von f abgeschlossen ist.

ii) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2$$

mit $\boldsymbol{x}_1 = \left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_2 = \left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{c}$, Minimalstelle ist und $t \in \mathbb{R}$ durch Lösen einer quadratischen Gleichungen bestimmt werden kann.

Hinweis: Die Funktion f ist strikt konvex und das Minimierungsproblem ist lösbar.