12. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

30.01.2009

Aufgabe 1. (Liniensuche mit Backtracking) Es sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion mit $m\boldsymbol{I}_n \preceq \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \preceq M\boldsymbol{I}_n$ für $m, M > 0$ und $\Delta\boldsymbol{x}$ die vorgegebene Abstiegsrichtung im Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

i) Zeigen Sie, dass die Abbruchbedingung für die iterierte *Liniensuche mit Backtracking* erfüllt ist für

$$0 < t \leq -\frac{\nabla f(\boldsymbol{x})^T \Delta\boldsymbol{x}}{M \parallel \Delta\boldsymbol{x} \parallel_2^2} \ .$$

ii) Leiten Sie aus i) eine obere Schranke für die Anzahl der notwendigen Iterationen ab.

Aufgabe 2. (Minimierung einer quadratischen Funktion) Es wird die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \gamma x_2^2\right)$$

für $\gamma > 0$ betrachtet. Weisen Sie nach, dass sich bei der Minimierung von f mittels eines *Gradienten-Abstiegsverfahrens* mit *exakter Liniensuche* bei Start im Punkt $\boldsymbol{x}^{(0)} = (\gamma, 1)^T$ für die k-te Iteration

$$x_1^{(k)} = \gamma\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^k \ , \qquad x_2^{(k)} = \left(-\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^k$$

ergibt.

Aufgabe 3. (Konvergenzverhalten des Newtonverfahrens) Betrachten Sie die Minimierung der folgenden Funktionen mittels des *Newtonverfahrens* und führen Sie für die feste Schrittweite $t = 1$ jeweils die ersten fünf Iterationsschritte durch. Geben Sie dabei insbesondere die Differenz zum jeweiligen Minimum an.

i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \log\left(e^x + e^{-x}\right)$ besitzt die Minimalstelle $x^* = 0$. Verwenden Sie den Startwert $x^{(0)} = 1$ und in einem zweiten Durchlauf den Startwert $x^{(0)} = 1,1$.

ii) Die Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = -\log(x) + x$ besitzt die Minimalstelle $x^* = 1$. Verwenden Sie den Startwert $x^{(0)} = 3$.

Hinweis: Beachten Sie bei i), dass $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt, und in ii) insbesondere den Definitionsbereich von g.