1. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

15.10.2008

Aufgabe 1. (Binäres Programm) Formulieren Sie das folgende Problem als *Lineares Programm* (*LP*):

Ein Hersteller von Mobilfunkgeräten möchte einen neuen Produktionsstandort aufbauen. Für das Vorhaben stehen €50 Mio. zur Verfügung, die von einem Investor gestellt werden.

Zur Auswahl stehen zwei Standorte, zu denen das notwendige Investitionskapital und der jeweilige Kapitalwert in Tabelle 1 angegeben sind. Der Kapitalwert ist dabei die für eine Investitionsentscheidung relevante Größe, in der auch das eingesetzte Investitionskapital, das in Summe €50 Mio. nicht überschreiten darf, bereits berücksichtigt ist.

An einem neuen Produktionsstandort kann optional auch ein Lager errichtet werden. Ein Lager ohne Produktionsbetrieb an einem Standort ist hingegen nicht sinnvoll.

Gemäß einer Vereinbarung mit dem Investor soll genau der Standort erschlossen werden, der den größten Kapitalwert verspricht.

Hinweis: Führen Sie für jeden in Tabelle 1 aufgeführten Posten eine *binäre Entscheidungsvariable* $x_i \in \{0,1\},\ i = 1,\ldots,4$, ein mit

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{Investition ja} \\ 0, & \text{Investition nein} \end{cases}$$

und modellieren Sie die Abhängigkeiten bzw. Ausschlusskriterien über geeignete Nebenbedingungen.

Standort / Posten	Investitionskapital [Mio. €]	Kapitalwert [Mio. €]
Aachen Produktion	25	15
Aachen Lager	17	10
Hamburg Produktion	35	15
Hamburg Lager	15	9

Tabelle 1: Kennwerte der potenziellen Produktionsstandorte.

Aufgabe 2. (Lineare Programmierung) Bringen Sie das *Lineare Programm* (LP)

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & c_3x_3 & & \\ \text{s.d.} & x_1 & - & x_2 & & & = & b_1 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & b_2 \\ & & & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

mit *Zielfunktion* $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^{3} c_j x_j$ und *Optimierungsvariable* $(x_1, x_2, x_3)^t \in (\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+, \mathbb{R})^t$ sowie Parametern $c_1, c_2, c_3, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ in die *kanonische Form*

$$\begin{array}{ll} \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.d.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, s \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n\ . \end{array}$$

Aufgabe 3. (Konvexität) Zeigen Sie die Konvexität der folgenden Funktionen, d.h. weisen Sie nach, dass

$$f(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \leq \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y})$$

für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in [0, 1]$ jeweils erfüllt ist.

i) $f_1(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$

ii) $f_2(x) = \frac{1}{x},\ x \in (0, \infty)$