2. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

31.10.2008

Aufgabe 1. (Eigenschaften konvexer Mengen) Beweisen Sie die folgenden Aussagen, die sich auch hinsichtlich Affinität statt Konvexität erweitern lassen.

i) Es seien $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $K \in \mathbb{N}$ konvexe Mengen. Dann ist

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k \in \{1,\ldots,K\}} \mathcal{C}_k$$

eine konvexe Menge.

ii) Eine Menge $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex genau dann, wenn der Schnitt von $\mathcal{C}$ mit jeder beliebigen Geraden in $\mathbb{R}^n$ konvex ist.

iii) Die *konvexe Hülle* $\mathcal{H}$ einer Menge $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die kleinste konvexe Menge, die $\mathcal{S}$ enthält, d.h. $\mathcal{H} = \operatorname{conv} \mathcal{S}$ ist gleich der Schnittmenge über alle konvexen Obermengen $\mathcal{D} = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ konvex}, \ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}\}$ von $\mathcal{S}$.

Aufgabe 2. (Konvexkombination) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex ist genau dann, wenn jede *Konvexkombination* in $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{C}$ gehört, d.h. für alle $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_K \in \mathcal{C}, \ K \in \mathbb{N}$, und $\lambda_k \geq 0, \ 1 \leq k \leq K$, mit $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k \boldsymbol{x}_k \in \mathcal{C} \ .$$

Aufgabe 3. (Konvexe Figuren) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen konvex sind.

i) Ein Streifen $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq \beta\}$ mit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n_{\neq 0}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) Ein Rechteck $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, \ i = 1, \ldots, n\}$ mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq n$.

iii) Ein Keil $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{x} \leq \beta_1, \ \boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{x} \leq \beta_2\}$ mit $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{R}^n_{\neq 0}$ und $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Hinweis: *Halbräume* $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq b\}$ mit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n_{\neq 0}$ und $b \in \mathbb{R}$ sind konvexe Mengen.