4. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

14.11.2008

Aufgabe 1. (Konvexe und konkave Funktionen) Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Funktionen konvex oder konkav sind.

i) $f_1(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

ii) $f_2(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_{>0}$.

iii) $f_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x_1 x_2},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_{>0}$.

iv) $f_4(\boldsymbol{x}) = e^{x_1^2 + x_2^2},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

v) $f_5(\boldsymbol{x}) = \log\left(e^{x_1^2} + \ldots + e^{x_n^2}\right),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2. (Epigraph) Es sei $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer konvexen, nicht leeren Menge $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass f konvex ist genau dann, wenn der *Epigraph* von f

$$\operatorname{epi}(f) = \{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R} \mid f(\boldsymbol{x}) \leq y\}$$

konvex ist.

Hinweis: Benutzen Sie die definierenden Eigenschaften konvexer Mengen und Funktionen.

Aufgabe 3. (Produkte und Quotienten konvexer Funktionen) Im Allgemeinen bleibt die Konvexität bei der Multiplikation und der Division zweier konvexer Funktionen nicht erhalten. Für geeignet eingeschränkte Funktionen gilt die Erhaltung dennoch. Zeigen Sie die folgenden Aussagen für zwei Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

i) Wenn f und g konvexe, nicht fallende (oder nicht steigende) und positive Funktionen sind, dann ist fg konvex.

ii) Wenn f und g konkav und positiv sind sowie f nicht fallend und g nicht steigend (oder umgekehrt) ist, dann ist fg konkav.

iii) Wenn f konvex, nicht fallend und positiv sowie g konkav, nicht steigend und positiv ist, dann ist f/g konvex.

Hinweis: Benutzen Sie die definierenden Eigenschaften konvexer Mengen und Funktionen.

Aufgabe 4. (Infimum einer Funktion) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2 - 1)^2 + x_2^2 \ .$$

Zeigen Sie, dass f nach unten beschränkt ist und das *Infimum* von f niemals angenommen wird.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion f im Grenzwert für $n \to \infty$ hinsichtlich der Argumentfolge $\left\{(n, 1/n)^T\right\}_{n \in \mathbb{N}}$.