5. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

21.11.2008

Aufgabe 1. (Optimalitätskriterium für konvexe Probleme) Es sei $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ die differenzierbare Zielfunktion eines konvexen Optimierungsproblems in Standardform und $M[h,g] \subseteq \mathcal{C}$ die dazugehörige zulässige Menge.

i) Zeigen Sie, dass ein Punkt $\boldsymbol{x}^* \in M[h,g]$ optimal ist genau dann, wenn

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}^*\right)^T\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\right) \geq 0$$

für alle $\boldsymbol{y} \in M[h,g]$ gilt.

ii) Es sei nun $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} + r\ ,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, mit

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} -22 \\ -14.5 \\ 13.0 \end{pmatrix}, \qquad r = 1$$

die Zielfunktion unter den Nebenbedingungen

$$-1 \leq x_i \leq 1\ , \quad i = 1,2,3\ .$$

Zeigen Sie, dass der Punkt $\boldsymbol{x}^* = (1, 0.5, -1)^T$ Optimalstelle dieses Problems ist.

Hinweis: Benutzen Sie für Teil i) die Charakterisierung 1. Ordnung für differenzierbare konvexe Funktionen.

Aufgabe 2. (Geometrische Lösung linearer Programme) Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & f(x_1,x_2) & & & & \\ \text{s.d.} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ & x_1 & + & 3x_2 & \geq & 1 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0\ . \end{array}$$

i) Skizzieren Sie die zulässige Menge.

ii) Ermitteln Sie für die folgenden Zielfunktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ geometrisch jeweils die Menge der Optimalstellen und den dazugehörigen Optimalwert.

(1) $f_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.

(2) $f_2(x_1,x_2) = -x_1 - x_2$.

(3) $f_3(x_1,x_2) = x_1$.

Hinweis: Skizzieren Sie die zu den Nebenbedingungen korrespondierenden Halbräume und betrachten Sie die aus dem Schnitt darüber resultierende zulässige Menge hinsichtlich der dazugehörigen Zielfunktionswerte.

Aufgabe 3. (Äquivalente konvexe Probleme) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden konvexen Probleme, d.h. weisen Sie nach, dass jeder zulässige Punkt des einen Problems einem zulässigen Punkt des anderen Problems mit gleichem Zielfunktionswert entspricht und umgekehrt.

i) Für vorgegebene Parameter $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ und $M > 0$ ist das *Problem robuster kleinster Quadrate*

$$\min \sum_{i=1}^{m} \Phi\left(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i\right) ,$$

wobei

$$\Phi(u) = \begin{cases} u^2 & , \quad |u| \le M \\ M(2|u| - M) , & |u| > M \end{cases} ,$$

mit Variable $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ äquivalent zu dem *Problem kleinster Quadrate mit variablen Gewichten*

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m \frac{\left(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i\right)^2}{w_i + 1} + M^2 \sum_{i=1}^m w_i \\ \text{s.d.} & \boldsymbol{w} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

über die Variablen $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$.

Hinweis: Optimieren Sie das zweite Problem für ein festes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ komponentenweise über $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$, d.h. für jeweils festes $i = 1, \ldots, m$ über die Variable $w = w_i$.

ii) Für vorgegebene konvexe Funktionen $f_0, \ldots, f_m$ sowie Parameter $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $d \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ ist das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(\boldsymbol{x}) / \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + d \\ \text{s.d.} & f_i(\boldsymbol{x}) \le 0 , \quad i = 1, \ldots, m \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{array}$$

mit Variable $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und Definitionsbereich der Zielfunktion $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + d > 0\}$ äquivalent zu dem Problem

$$\begin{array}{ll} \min & g_0(\boldsymbol{y}, t) \\ \text{s.d.} & g_i(\boldsymbol{y}, t) \le 0 , \quad i = 1, \ldots, m \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} + td = 1 \end{array}$$

mit Variablen $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$, wobei g_i für $i = 0, \ldots, m$ die *Perspective* von f_i bezeichnet, d.h.

$$g_i(\boldsymbol{y}, t) = t f_i\left(\frac{\boldsymbol{y}}{t}\right) .$$