6. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

05.12.2008

Aufgabe 1. (Optimale Aktionspegel mittels LP) Formulieren Sie das folgende Problem als *Lineares Programm*.

Es werden $n \in \mathbb{N}$ Aktionspegel $x_1, .., x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachtet. Jede Aktion $j \in \{1, \ldots, n\}$ verbraucht die begrenzten Ressourcen $i = 1, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N}$, mit Intensität $a_{ij}x_j$, wobei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ als Parameter gegeben ist. Der Verbrauch einer Ressource i ist additiv, sodass der Gesamtverbrauch $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ beträgt. Insbesondere kann eine Aktion neben dem Verbrauch bestimmter Ressourcen somit auch andere Ressourcen wieder auffüllen. Die verfügbaren Ressourcenmengen sind als Parameter $c_1^{max}, \ldots, c_m^{max} \geq 0$ vorgegeben und dürfen nicht überschritten werden.

Jede Aktion $j \in \{1, \ldots, n\}$ erzielt den Erlös

$$r_j(x_j) = \begin{cases} p_j x_j & , \ 0 \leq x_j \leq q_j \\ p_j q_j + p_j^{rab}(x_j - q_j) & , \ x_j > q_j \end{cases} \quad ,$$

wobei $p_j > 0$ den Grunderlös für Aktion j bezeichnet und $p_j^{rab} < p_j$ den rabattierten Erlös, falls der Aktionspegel $q_j > 0$ überschritten wird.

Gesucht sind die optimalen Aktionspegel $x_1, \ldots, x_n$, sodass der Gesamterlös $\sum_{j=1}^{n} r_j(x_j)$ maximal wird und die Ressourcenbegrenzungen eingehalten werden.

Hinweis: Die stückweise lineare konkave Erlösfunktion lässt sich auch ausdrücken als

$$r_j(x_j) = \min\left\{p_j x_j,\ p_j q_j + p_j^{rab}(x_j - q_j)\right\} \ .$$

Aufgabe 2. (Funktionsapproximation durch Monome) Es wird eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ betrachtet, die im Punkt $\boldsymbol{x}_0 > \boldsymbol{0}$ differenzierbar ist und für die $f(\boldsymbol{x}_0) > 0$ gilt. Bestimmen Sie ein *Monom* $\hat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\hat{f}(\boldsymbol{x}) = c x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \ , \quad c > 0,\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \ ,$$

sodass $\hat{f}(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0)$ und $\left|\hat{f}(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\right| \approx 0$ für $\boldsymbol{x}$ nahe bei $\boldsymbol{x}_0$ gilt.

Hinweis: Bestimmen Sie die Koeffizienten des Monoms über die Taylor-Approximation 1. Ordnung von f.

Aufgabe 3. (Geometrische Programme) Formulieren Sie die folgenden Probleme jeweils als *Geometrisches Programm* (*GP*).

i) Minimiere über $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_{>0}$
$$\max\{p(\boldsymbol{x}),\ q(\boldsymbol{x})\}\ ,$$
wobei p und q *Posynome* sind.

ii) Minimiere über $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_{>0}$
$$e^{p(\boldsymbol{x})} + e^{q(\boldsymbol{x})}\ ,$$
wobei p und q Posynome sind.

iii) Minimiere über $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_{>0}$
$$\frac{p(\boldsymbol{x})}{r(\boldsymbol{x}) - q(\boldsymbol{x})}, \quad \text{s.d. } r(\boldsymbol{x}) > q(\boldsymbol{x})\ ,$$
wobei p und q Posynome sind und r ein Monom.