8. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

19.12.2008

Aufgabe 1. (Duales Problem) Bestimmen Sie zu den folgenden Optimierungsproblemen mit Variable $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ mittels des jeweiligen *dualen Problems* maximale untere Schranken für die Optimalwerte.

i)
$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1^2 + 8x_2^2 \\ \text{s.d.} \quad & 3x_1 + 6x_2 = 10 \ . \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 x_2 \\ \text{s.d.} \quad & x_1^2 + x_2^2 = 1 \ . \end{aligned}$$

Hinweis: Überführen Sie das Optimierungsproblem in ii) zunächst in ein äquivalentes Minimierungsproblem und beachten Sie den entsprechenden Vorzeichenwechsel bei dem resultierenden Schrankenwert.

Aufgabe 2. (Lagrange-Relaxierung binärer Programme) Es wird ein *binäres Programm* in Standardform betrachtet, d.h.

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.d.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*) \end{aligned}$$

mit Variable $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n$ und Parametern $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

i) Bestimmen Sie das zugehörige duale Problem, wobei Nebenbedingung $(*)$ dargestellt wird als
$$x_i(x_i - 1) = 0, \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

ii) Zeigen Sie, dass die maximale untere Schranke, die das duale Problem für den Optimalwert des binären Programms liefert, identisch ist mit dem Optimalwert des relaxierten binären Programms, bei dem Nebenbedingung $(*)$ ersetzt wird durch
$$0 \le x_i \le 1, \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

Hinweis: Betrachten Sie für ii) das duale Problem des relaxierten binären Programms.

Aufgabe 3. (Summe der größten Vektorelemente) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{r} x_{[i]}$$

gibt die Summe der absteigend sortierten größten $r \leq n$ Komponenten von $\boldsymbol{x}$ an, d.h. es gilt $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \ldots \geq x_{[r]}$.

i) Zeigen Sie, dass $f(\boldsymbol{x})$ für einen festen gegebenen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gleich dem Optimalwert des Linearen Programms

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} \\ \text{s.d.} & \mathbf{1}^T \boldsymbol{y} = r \\ & \mathbf{0} \leq \boldsymbol{y} \leq \mathbf{1} \end{array}$$

mit Variable $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ ist.

ii) Zeigen Sie, dass das duale Problem des in i) gegebenen Linearen Programms dargestellt werden kann als

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{1}^T \boldsymbol{u} + rt \\ \text{s.d.} & \boldsymbol{u} + t\mathbf{1} \geq \boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

mit Variablen $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$.