Formelblatt Theoretische Informationstechnik

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$

(i) $P(\Omega) = 1$.
(ii) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \forall A_n \in \mathfrak{A}$,
$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j$ mit $i \neq j$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad A, B \in \mathfrak{A}, \quad P(B) > 0.$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und Bayes-Formel

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n) \cdot P(B_n), \quad \Omega = \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} B_n,$$

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n) \cdot P(B_n)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot P(B_j)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(A) > 0.$$

Stochastische Unabhängigkeit (Ereignisse)

$A, B \in \mathfrak{A}$ heißen stochastisch unabhängig, falls

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Diskrete Zufallsvariable

$X : \Omega \to T = \{t_1, t_2, ...\} \subset \mathbb{R}, \quad P(X = t_i) = f_X(t_i)$.

Diskrete Verteilungen

a) Diskrete Gleichverteilung:
$P(X = i) = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, ..., n$.

b) Bernoulli-Verteilung:
$P(X = 1) = p$ und $P(X = 0) = 1 - p, \quad p \in [0, 1]$.

c) Binomialverteilung:
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n, \quad p \in [0, 1]$.

d) Geometrische Verteilung:
$P(X = k) = (1 - p)^k p, \quad k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad p \in (0, 1]$.

e) Poissonverteilung:
$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \lambda > 0$.

Absolut-stetige Zufallsvariable

$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) \mathrm{d}t$.

Absolut-stetige Verteilungen

a) Normalverteilung:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Bezeichnung: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2), \ \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma^2 > 0$.

b) Gleich- oder Rechteckverteilung:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$$

Bezeichnung: $X \sim \mathrm{R}(a, b), \ a < b \in \mathbb{R}$.

c) Exponentialverteilung:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Bezeichnung: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \ \lambda > 0$.

d) Rayleigh-Verteilung:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(r)$$

Bezeichnung: $R \sim \mathrm{Ray}(\sigma^2), \ \sigma^2 > 0$.

e) Rice-Verteilung:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2+\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot I_0\left(\frac{r\mu}{\sigma^2}\right), I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \vartheta} \mathrm{d}\vartheta$$

Bezeichnung: $R \sim \mathrm{Rice}(\mu, \sigma^2), \ \mu > 0, \ \sigma^2 > 0$.

f) Lognormal-Verteilung:

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ y > 0$$

Bezeichnung: $Y \sim \mathrm{LogN}(\mu, \sigma^2), \ \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma^2 > 0$.

Erwartungswert

a) X diskrete Zufallsvariable:

$$\mathrm{E}\left(g(X)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) f_X(x_i) \quad \text{(falls existent).}$$

b) X absolut-stetige Zufallsvariable:

$$\mathrm{E}\left(g(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x \quad \text{(falls existent).}$$

Varianz, Kovarianz, Korrelation

a) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$
b) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))\right)$
c) $\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}}$

Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix

a) $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = (\mathrm{E}(X_1), \ldots, E(X_n))' \in \mathbb{R}^n$
b) $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

n-dimensionale Normalverteilung

$\boldsymbol{X}$ n-dimensional normalverteilt mit regulärer Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}$ besitzt die Dichte

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\boldsymbol{C}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{C}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}.$$

Bezeichnung: $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{C})$.

Stochastische Unabhängigkeit (Zufallsvariablen)

$X_1, \ldots, X_n$ (absolut-stetig) heißen stochastisch unabhängig, falls

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Transformationssatz

Unter den Annahmen

$M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,
$T : M \to \mathbb{R}^n$ injektiv,
$\left| \left(\frac{\partial T_i(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \right| > 0 \quad \forall (x_1, \ldots, x_n)' \in M$,

besitzt der Zufallsvektor $\boldsymbol{Y} = T(\boldsymbol{X})$ eine Dichte

$$f_{\boldsymbol{Y}}(y_1,\dots,y_n) = \frac{1}{\left|\left(\frac{\partial T_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\right)|_{\boldsymbol{x}=T^{-1}(y_1,\dots,y_n)}\right|} f_{\boldsymbol{X}}\left(T^{-1}(y_1,\dots,y_n)\right)$$

$$= \left|\left(\frac{\partial T_i^{-1}(y_1,\dots,y_n)}{\partial y_j}\right)\right| f_{\boldsymbol{X}}\left(T^{-1}(y_1,\dots,y_n)\right),$$

$$(y_1,\dots,y_n)' \in T(M).$$

Erweiterter Arcustangens $\measuredangle(x,y)$

$$\measuredangle(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x>0,\ y\geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & x<0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+2\pi & x>0,\ y<0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0,\ y\geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x=0,\ y<0 \end{cases}.$$

Summen von Zufallsvariablen

$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ Zufallsvektor mit Dichte $f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2)$.
Dann besitzt $Y = X_1 + X_2$ die Dichte

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(t, y-t)\mathrm{d}t.$$

Komplexe Normalverteilung

a) $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} + i\boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^n$ heißt komplex normalverteilt, wenn $(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})'$ $2n$-dimensional normalverteilt ist.

b) $\boldsymbol{X}$ ist zirkulär symmetrisch komplex normalverteilt, wenn

$$\mathrm{Cov}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{V}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\boldsymbol{Q} & -\mathrm{Im}\,\boldsymbol{Q}\\ \mathrm{Im}\,\boldsymbol{Q} & \mathrm{Re}\,\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$$

für eine hermitesche, n.n.d. Matrix $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{Q})$.

c) $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{Q}$ regulär $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{X}$ besitzt die Dichte

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = [\det(\pi\boldsymbol{Q})]^{-1}\exp\left\{-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^*\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}.$$

d) $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{Q}) \Longrightarrow \mathrm{E}\left((\boldsymbol{X}-\mathrm{E}(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{X}-\mathrm{E}(\boldsymbol{X}))^*\right) = \boldsymbol{Q}$.

e) $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n} \Longrightarrow \boldsymbol{AX} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{A\mu}, \boldsymbol{AQA}^*)$.

f) $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{Q}_1)$, $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{Q}_2)$, $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ stochastisch unabhängig $\Longrightarrow \boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2)$.

g) $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{Q}$ regulär $\Longrightarrow \mathrm{H}(\boldsymbol{X}) = \log|\pi e\boldsymbol{Q}|$.

Stochastische Prozesse

$\{X(t) \mid t\in T\}$, $\{Y(t) \mid t \in T\}$, $T \subseteq \mathbb{R}$:
a) $\mu_X(t) = \mathrm{E}(X(t))$,
b) $R_{XX}(t_1,t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X^*(t_2))$,
c) $C_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\cdot\mu_X^*(t_2)$,
d) $R_{XY}(t_1,t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)Y^*(t_2))$.

Leistungsdichtespektrum

a) $\mathrm{E}\left(|X(t)|^2\right) = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)\mathrm{d}f$,
b) $S_{XX}(f) \in \mathbb{R}$ und $S_{XX}(f) \geq 0 \quad \forall f \in \mathbb{R}$,
c) $S_{XX}(f) = S_{XX}(-f)$, falls $R_{XX}(t) \in \mathbb{R}$.

LTI-Systeme

a) $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u)\mathrm{d}u$,
b) $\mu_Y(t) = \mathrm{E}(Y(t)) = \mu_X(t)\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\mathrm{d}u$,
c) $R_{YY}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\int_{-\infty}^{\infty} h^*(v)R_{XX}(t-u+v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u$,
d) $S_{YY}(f) = |H(f)|^2 S_{XX}(f)$.

Entropie

$\mathrm{H}(X) = -\sum_j P(X=x_j)\log P(X=x_j)$

Gemeinsame Entropie

$\mathrm{H}(X,Y) = -\sum_{i,j} P(X=x_i, Y=y_j)\log P(X=x_i,Y=y_j)$

Bedingte Entropie

$\mathrm{H}(X|Y) = -\sum_{i,j} P(X=x_i,Y=y_j)\log P(X=x_i|Y=y_j)$

Transinformation

$\mathrm{I}(X;Y) = \mathrm{H}(X) - \mathrm{H}(X|Y)$

Differentielle Entropie

$\mathrm{H}(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)\mathrm{d}x$

Gemeinsame differentielle Entropie

$\mathrm{H}(X,Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Bedingte differentielle Entropie

$\mathrm{H}(X|Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log f(x|y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Kullback-Leibler-Distanz

$\mathrm{D}(f \parallel g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log\frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$ (kontinuierlich)
$\mathrm{D}(\mathbf{p} \parallel \mathbf{q}) = \sum_i p_i \log\frac{p_i}{q_i}$ (diskret)

Entropie der Normalverteilung

$\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C}) \Longrightarrow \mathrm{H}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{2}\ln\left((2\pi e)^n|\boldsymbol{C}|\right)$.

Binärer symmetrischer Kanal

$C = \max_{(p_0,p_1)} \mathrm{I}(X;Y) = 1 + (1-\epsilon)\log_2(1-\epsilon) + \epsilon\log_2\epsilon$

Gaußkanal mit binärer Eingabe

$C = \max_{(p_0,p_1)} \mathrm{I}(X;Y) = 1 - \mathrm{E}\left[\log_2(1+e^{-W})\right],\ W \sim \mathrm{N}\left(\frac{2\mu^2}{\sigma^2}, \frac{4\mu^2}{\sigma^2}\right)$.

Reeller Gaußkanal

$C = \max_{\mathrm{E}(X^2)\leq L} \mathrm{I}(X;Y) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{L}{\sigma^2}\right)$

Paralleler Gaußkanal

$C = \max_{\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\left(X_i^2\right)\leq L} \mathrm{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \ln\left(1+\frac{(\nu-\lambda_i)^+}{\lambda_i}\right)$,

$\boldsymbol{\Sigma_Z} = \boldsymbol{T}\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\boldsymbol{T}'$, $\sum_{i=1}^n(\nu-\lambda_i)^+ = L$.

Bandbegrenzer Gaußkanal

$C = \max_{\mathrm{E}(X^2)\leq L} \mathrm{I}(X;Y) = W\ln\left(1+\frac{L}{N_0 W}\right)$

MIMO-Kanal (festes $\boldsymbol{H}$)

$C = \max_{\mathrm{E}(\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{X})\leq L} \mathrm{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) = \sum_{i=1}^t \left[\log\left(\frac{\nu\lambda_i}{\sigma^2}\right)\right]^+$,

$\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H} = \boldsymbol{U}\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_t)\boldsymbol{U}^*$, $\sum_{i=1,\lambda_i>0}^t \left(\nu - \frac{\sigma^2}{\lambda_i}\right)^+ = L$.

MIMO-Kanal (normalverteiltes $\boldsymbol{H}$)

$C = \max_{\mathrm{E}(\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{X})\leq L} \mathrm{I}\left(\boldsymbol{X};(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{H})\right) = \mathrm{E}\left[\log\det\left(\boldsymbol{I}_r + \frac{L}{t\sigma^2}\boldsymbol{HH}^*\right)\right]$