Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

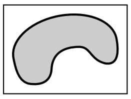
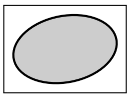
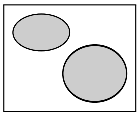
22.8.2014

Aufgabe 1. Die Gesamtaufgabe besteht aus zwei Teilen, die **unabhängig** voneinander lösbar sind.

Teil I

Beantworten Sie die folgenden Fragen, d.h. a) bis d), jeweils mit einer **kurzen** Begründung.

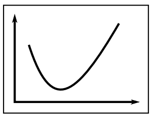
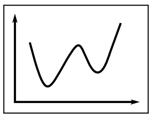
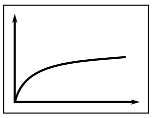
a) Welche der abgebildeten Mengen ist konvex?

1)  2)  3) 

b) Welche der folgenden Mengen ist konvex? (Hierbei: $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$)

1) $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \geq 2\}$
2) $\mathcal{E} = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 2\}$
3) $\mathcal{F} = \{x \mid \sin(x) \leq 0.5\}$
4) $\mathcal{G} = \{x \mid x \leq -2\} \cup \{x \mid x \geq 3\}$

c) Welche der abgebildeten Funktionen ist konvex?

1)  2)  3) 

d) Welche der folgenden Funktionen ist **nicht** konvex?

1) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$
2) $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}, x > 0$
3) $h(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$
4) $k(x) = 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Teil II

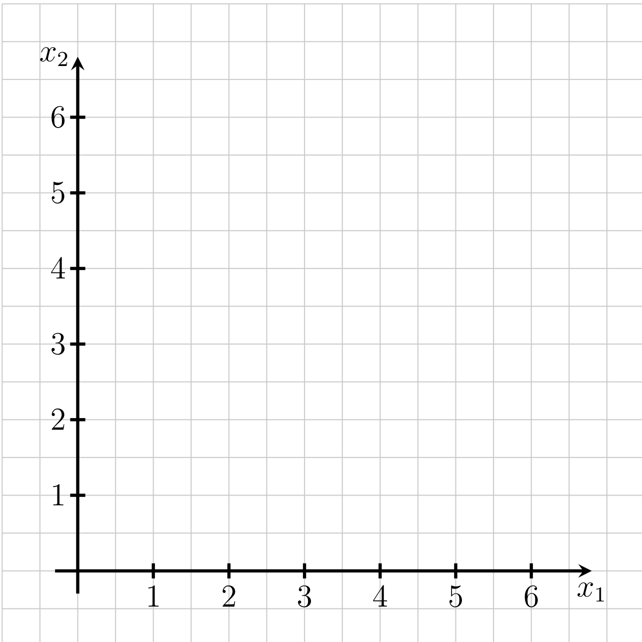
Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{array}$$

Dabei sei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2 \in [0, \infty)$. Außerdem sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie die Menge zulässiger Lösungen.



b) Geben Sie für folgende Zielfunktionen jeweils den optimalen Wert und die zugehörige Menge optimaler Lösungen an:

i) $f_0(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$

ii) $f_0(\mathbf{x}) = x_1 - 3x_2$

iii) $f_0(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{x}\|_\infty$

Hinweis: Die Maximumsnorm des Vektors $\mathbf{x}$ ist definiert als

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Aufgabe 2. Die Gesamtaufgabe besteht aus zwei Teilen, die **unabhängig** voneinander lösbar sind.

Teil I

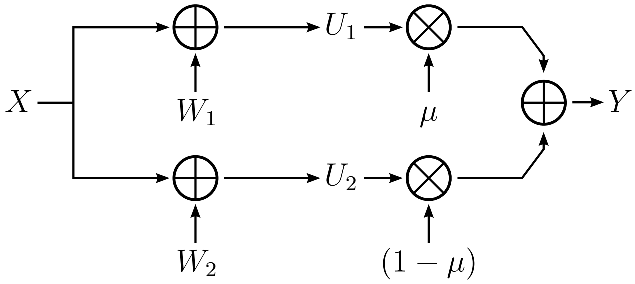
a) X und Y seien absolut-stetige Zufallsvariablen. Vervollständigen Sie die mittlere Spalte der Tabelle mit den passenden Operatoren, so dass die resultierenden Aussagen allgemein gelten. Verwenden Sie dabei nur die in der ersten Tabellenzeile angegebenen Operatoren. Falls mehrere Operatoren zutreffen, geben Sie nur die stärkste Aussage an.

	$>, <, \geq, \leq, =, \neq$	
$\mathrm{H}(X)$		$\mathrm{H}(X\|Y)$
$\mathrm{I}(X;Y)$		0
$\mathrm{I}(X;Y)$		$\mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y) - \mathrm{H}(X,Y)$

b) Z_1 und Z_2 seien identisch verteilte stochastisch unabhängige (i.i.d.) Zufallsvariablen mit $Z_1, Z_2 \sim \mathrm{R}(-1,1)$. Bestimmen Sie die differentielle Entropie $\mathrm{H}(\mathbf{Z})$ des Zufallsvektors $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)'$.

Teil II

Betrachten Sie den folgenden Kanal. Es soll im Folgenden schrittweise die Transinformation $\mathrm{I}(X;\mathbf{U})$ berechnet werden, wobei $\mathbf{U} = (U_1, U_2)'$. Der Kanaleingang $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma_x^2)$ sei stochastisch unabhängig von den Rauscheinflüssen W_1 und W_2. Die Rauschterme seien i.i.d. und es gelte weiterhin $W_1, W_2 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_w^2)$.



Hinweis: Verwenden Sie im Folgenden den natürlichen Logarithmus.

c) Nehmen Sie an, dass μ konstant und reellwertig ist sowie im Intervall $\mu \in (0,1)$ liegt. Bestimmen Sie zunächst die Transinformation $\mathrm{I}(X;Y)$ des gesamten Kanals $X \to Y$.

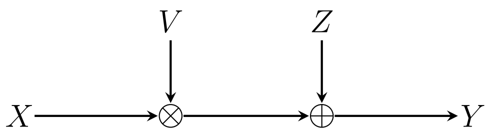
Betrachten Sie nun den Teilkanal $X \to \mathbf{U}$.

d) Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma_U}$ des Zufallsvektors $\mathbf{U}$.

e) Bestimmen Sie die Entropie $\mathrm{H}(\mathbf{U})$.

f) Bestimmen Sie nun unter Verwendung der vorherigen Teilaufgaben die Transinformation $\mathrm{I}(X;\mathbf{U})$.

Aufgabe 3. Betrachten Sie den folgenden Kanal mit reeller Eingabe X mit $\mathrm{E}(X) = 0$, einer Zufallsvariablen V, welche die Kanalverstärkung (Fading) beschreibt, und additivem weißen Rauschen $Z \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. X, V und Z seien gemeinsam stochastisch unabhängig.



a) Sei V zunächst einpunktverteilt mit $\mathrm{P}(V = \frac{1}{2}) = 1$. X unterliege der Leistungsbeschränkung L, d.h. $\mathrm{E}(X^2) \leq L$. Geben Sie für diesen Fall die Kanalkapazität an (ohne Beweis).

b) Sei V nun einpunktverteilt mit $\mathrm{P}(V = 1) = 1$. Ferner unterliege der Ausgang Y einer Leistungsbeschränkung P, d.h. $\mathrm{E}(Y^2) \leq P$. Bestimmen Sie die Kanalkapazität für diesen Fall. Wie muss X verteilt sein, damit die Kanalkapazität erreicht wird?

c) Die Verteilung von V sei nun beliebig. Zeigen Sie, dass durch Kenntnis des Fadingfaktors V die Transinformation erhöht wird, also gilt:

$$\mathrm{I}(X; Y|V) \geq \mathrm{I}(X; Y).$$

Hinweis: Benutzen Sie:

$$\mathrm{I}(R; S|T) = \mathrm{H}(R|T) - \mathrm{H}(R|S, T).$$

Aufgabe 4. Betrachten Sie den komplexen MIMO-Kanal $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z}$ mit Eingabe $\mathbf{X}$, fester Kanalmatrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und von der Eingabe stochastisch unabhängigem Rauschterm $\mathbf{Z} \sim \mathrm{SCN}\left(\mathbf{0}, 7 \cdot \mathbf{I}_3\right)$. Für die Eingabe gelte eine Leistungsbeschränkung von $L = 12$, d.h. $\mathrm{E}(\mathbf{X}^*\mathbf{X}) \leq L$. Verwenden Sie bei der Lösung dieser Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

a) Geben Sie die Anzahl der Sende- und Empfangsantennen an.

b) Berechnen Sie die Kapazität des MIMO-Kanals.

c) Finden Sie die Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$ derjenigen Eingabeverteilung $\mathbf{X} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, mit der die Kanalkapazität erreicht wird.

d) Die Leistungsbeschränkung wird jetzt auf $L = 3$ reduziert. Wie groß ist nun die Kanalkapazität, und mit welcher Eingabeverteilung wird sie erreicht?