4. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Georg Böcherer, Gernot Fabeck

12.11.2007

Aufgabe 1. Ein Empfänger besitze zwei Antennen, mit denen er ein Signal empfängt. Die Empfangsleistungen an den Antennen seien durch die Zufallsvariablen X_1 und X_2 beschrieben, die den Zufallsvektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ bilden. Die gemeinsame Dichte von $\boldsymbol{X}$ sei gegeben durch:

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)}, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Empfangsleistung an der zweiten Antenne größer ist als die an der ersten.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Betrag der Differenz der Empfangsleistungen kleiner als 1 ist.

Aufgabe 2. Ein zweidimensional normalverteilter Zufallsvektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ werde durch folgende Dichte beschrieben:

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)}$$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ sowie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}$ des Zufallsvektors $\boldsymbol{X}$.

(b) Geben Sie die Dichten $f_{X_1}(x_1)$ und $f_{X_2}(x_2)$ an.

(c) Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig?

Aufgabe 3. Betrachten Sie den normalverteilten Zufallsvektor

$$(Z_1, Z_2)' \sim \mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{C}), \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Wie lautet die Dichte von $Z = Z_1 + Z_2$?

Hinweis:
Verwenden Sie, dass $Z = Z_1 + Z_2$ ebenfalls normalverteilt ist.