12. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Georg Böcherer, Gernot Fabeck

01.02.2008

Aufgabe 1. Gegeben sei eine Nachrichtenquelle X, welche die diskreten Symbole x_1, x_2, x_3 mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3 sendet. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorregel, für welche p_1,p_2, p_3 die Entropie $H(X)$ maximal wird.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$F(p_1, p_2, p_3) = H(X) + \lambda\Big(\sum_{i=1}^{3} p_i - 1\Big).$$

Aufgabe 2. Es seien $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ein Quellalphabet, $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_d\}$ ein Kodealphabet und g ein e.d. Kode. Für $j = 1, \ldots, m$ bezeichne $P(X = x_j) = p_j$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Quellbuchstabens x_j und n_j bezeichne die Länge des Kodeworts $g(x_j)$. Zeigen Sie, dass für die erwartete Kodewortlänge $\bar{n}(g)$ gilt:

$$\bar{n}(g) = \frac{H(X)}{\log d} \quad \Leftrightarrow \quad p_j = d^{-n_j} \text{ für alle } j = 1, \ldots, m \text{ mit } p_j > 0.$$

Aufgabe 3. Ein PF-Kode g^* mit den Wortlängen $n_1^*, \ldots, n_m^*$ heißt *optimal*, wenn

$$\bar{n}(g^*) = \sum_{i=1}^{m} p_i n_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} p_i n_i = \bar{n}(g)$$

für alle PF-Kodes g mit Wortlängen $n_1, \ldots, n_m$ ist.
Ein Algorithmus zur Konstruktion optimaler PF-Kodes ist das *Huffman-Verfahren*:

(a) Ordne die Symbole des Quellalphabets nach fallenden Wahrscheinlichkeiten.

(b) Konstruiere einen binären Baum mit den Quellbuchstaben als Blättern, wobei sukzessive neue Knoten gebildet werden durch das Zusammenfassen der beiden Konten mit den geringsten Wahrscheinlichkeiten; markiere die neuen Knoten mit den jeweils addierten Wahrscheinlichkeiten.

(c) Durch Rückwärtsgehen von der Wurzel zu den Blättern (hoch = 1, runter = 0) kann der Huffman-Kode abgelesen werden.

Bestimmen Sie für $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_8\}$ mit $p = (0.25, 0.2, 0.15, 0.15, 0.12, 0.05, 0.04, 0.04)$ und $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ einen optimalen PF-Kode. Berechnen Sie die erwartete Kodewortlänge des Kodes und vergleichen Sie diese mit $H(X)$.