13. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Gernot Fabeck, Chunhui Liu

6.2.2009

Aufgabe 1. Die diskreten Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien identisch verteilt aber nicht notwendigerweise unabhängig. Ferner sei

$$\rho = 1 - \frac{H(X_2|X_1)}{H(X_1)}.$$

a) Zeigen Sie, dass gilt $\rho = \frac{I(X_1,X_2)}{H(X_1)}$.

b) Zeigen Sie, dass gilt $0 \leq \rho \leq 1$.

c) In welchem Fall gilt $\rho = 0$?

Aufgabe 2. Es seien $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ein Quellalphabet, $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_d\}$ ein Kodealphabet und g ein eindeutig dekodierbarer Kode. Für $j = 1, \ldots, m$ bezeichne $P(X = x_j) = p_j$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Quellbuchstabens x_j und n_j bezeichne die Länge des Kodeworts $g(x_j)$. Zeigen Sie, dass für die erwartete Kodewortlänge $\bar{n}(g)$ gilt:

$$\bar{n}(g) = \frac{H(X)}{\log d} \quad \Leftrightarrow \quad p_j = d^{-n_j} \text{ für alle } j = 1, \ldots, m \text{ mit } p_j > 0.$$

Aufgabe 3. Ein PF-Kode g^* mit den Wortlängen $n_1^*, \ldots, n_m^*$ heißt *optimal*, wenn

$$\bar{n}(g^*) = \sum_{i=1}^{m} p_i n_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} p_i n_i = \bar{n}(g)$$

für alle PF-Kodes g mit Wortlängen $n_1, \ldots, n_m$ ist.

Ein Algorithmus zur Konstruktion optimaler PF-Kodes ist das *Huffman-Verfahren*:

1. Ordne die Symbole des Quellalphabets nach fallenden Wahrscheinlichkeiten.

2. Konstruiere einen binären Baum mit den Quellbuchstaben als Blättern, wobei sukzessive neue Knoten gebildet werden durch das Zusammenfassen der beiden Konten mit den geringsten Wahrscheinlichkeiten; markiere die neuen Knoten mit den jeweils addierten Wahrscheinlichkeiten.

3. Durch Rückwärtsgehen von der Wurzel zu den Blättern (hoch = 1, runter = 0) kann der Huffman-Kode abgelesen werden.

Bestimmen Sie für $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_8\}$ mit $p = (0.25, 0.2, 0.15, 0.15, 0.12, 0.05, 0.04, 0.04)$ und $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ einen optimalen PF-Kode. Berechnen Sie die erwartete Kodewortlänge des Kodes und vergleichen Sie diese mit $H(X)$.