5. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

20.11.2009

Aufgabe 1. Eine reelle Matrix $\mathbf{A}$ ist positiv definit, wenn für die quadratische Form $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass eine positiv definite Matrix ausschließlich positive Elemente a_{ii} auf der Hauptdiagonalen besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie einen Vektor, welcher in der i-ten Komponente gleich Eins ist und ansonsten nur Nullen aufweist, d.h $\mathbf{e}_i = (0\,,\ldots,0\,,1\,,0\,,\ldots,0)'$.

b) Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass das Produkt $\mathbf{A} = \mathbf{B}'\mathbf{B}$ eine positiv definite Matrix ist.

c) Sei $\mathbf{A}$ zusätzlich symmetrisch. Gegeben sind die Eigenwerte λ_i und die Eigenvektoren $\boldsymbol{\nu}_i$ der Matrix $\mathbf{A}$. Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenwerte sind durch die Gleichung $\mathbf{A}\boldsymbol{\nu}_i = \lambda_i\boldsymbol{\nu}_i$ miteinander verknüpft. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer positiv definiten Matrix größer als Null sind.

d) Aus Übung 4 ist bekannt, dass die reelle Kovarianzmatrix $\mathbf{C}$ symmetrisch ist. Weiterhin ist jede Kovarianzmatrix $\mathbf{C}$ positiv semidefinit (Skript Seite 24). Im Folgenden soll allerdings von einer positiv definiten Kovarianzmatrix ausgegangen werden.

Positiv definite Matrizen – und somit auch Kovarianzmatrizen – besitzen eine Vielzahl von typischen Eigenschaften. Einige dieser Eigenschaften wurden in den Aufgabenteilen **a)** bis **c)** gezeigt. Entscheiden Sie nun, ob die unten angegebenen Matrizen gültige Kovarianzmatrizen sind. Nennen Sie gegebenenfalls mindestens eine Bedingung, welche verletzt ist.

i) $\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ii) $\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & -3 \end{pmatrix}$

iv) $\mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{pmatrix}$

Bitte wenden!

Aufgabe 2. Gegeben sei die gemeinsame Zähldichte $f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$ von vier verschiedenen Signalpunkten (siehe Grafik 1). Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Wertes ist dabei für alle Punkte gleich.

a) Die gemeinsame Zähldichte ist in der unten stehenden Tabelle angegeben. Vervollständigen Sie diese Tabelle, indem Sie in der entsprechenden Spalte bzw. Zeile die dazugehörige Randdichte eintragen.

	$k=-1$	$k=0$	$k=+1$	$P(X=l)$
$l=-1$	0	1/4	0	
$l=0$	1/4	0	1/4	
$l=+1$	0	1/4	0	
$P(Y=k)$				

Hinweis: Für die Randdichte von X gilt: $P(X = l) = \sum_{y \in T_Y} P(X = l, Y = y)$, wobei T_Y der diskrete Träger von Y ist.

b) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X und Y unkorreliert sind.

Hinweis: Es gilt

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{k=-1}^{1} \sum_{l=-1}^{1} kl P(X = k, Y = l)\,.$$

c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

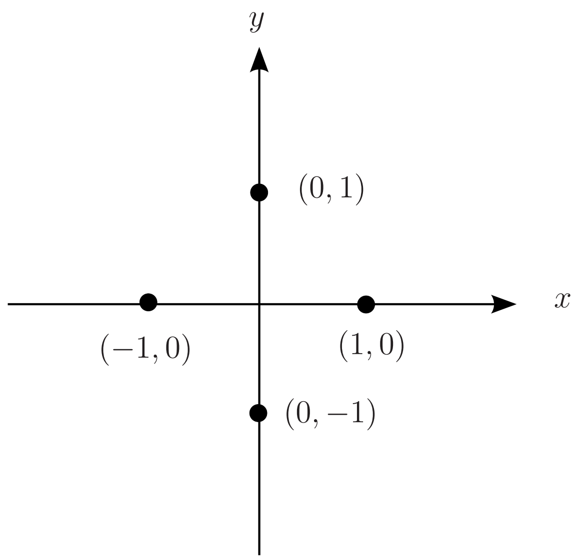

Figure 1: Signalkonstellationen