

7. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

04.12.2009

Aufgabe 1. Für die zufällige Phase eines am Empfänger eintreffenden Signals bei Mehrwegeausbreitung gelte $\phi \sim R(0, 2\pi)$. Ferner sind $Z_1 = \cos^2(\phi)$ und $Z_2 = \sin^2(\phi)$.

a) Zeigen Sie für $c_0 \in \mathbb{R}$:

- $\sin(c_0 + \phi)$ und $\sin(\phi)$ haben dieselbe Verteilung.
- $\cos(c_0 + \phi)$ und $\cos(\phi)$ haben dieselbe Verteilung.
- Es gilt $E(\cos(\phi)) = E(\sin(\phi)) = 0$.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von Z_1 und Z_2 .

c) Berechnen Sie die Kovarianz der Zufallsvariablen Z_1 und Z_2 . Sind Z_1 und Z_2 unabhängig? Sind sie unkorreliert?

Aufgabe 2. Die Friis-Gleichung für Freiraumausbreitung von elektromagnetischen Wellen lautet in vereinfachter Form

$$P_r(d) = P_t \cdot \frac{G_t G_r \lambda^2}{(4\pi d)^2} > 0, \quad (1)$$

wobei P_t und $P_r(d)$ die Leistung am Sender bzw. Empfänger modellieren. Die weiteren Größen, insbesondere die Distanz d zwischen Sender und Empfänger, werden im Folgenden als konstant angenommen. Am Sender wird die Leistung gemäß $P_t = U^2/R$ durch einen Generator erzeugt, wobei U eine reelle Spannung und R ein konstanter ohmscher Widerstand sind. Durch technische Ungenauigkeiten unterliegt diese Spannung zufälligen Schwankungen. Die Spannung U wird zunächst als Realisierung einer mittelwertfreien, normalverteilten Zufallsvariablen $U \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ angenommen.

a) Formulieren Sie die Transformation $P_r = T(U) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Welche Voraussetzung des Transformationssatzes für Dichten ist verletzt?

In der Vorlesung wurde der Transformationssatz für Dichten eingeführt. Für eine invertierbare Abbildung $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ und eine reelle Zufallsvariable X ist die transformierte Dichte der Zufallsvariablen $Y = T(X)$ gegeben durch

$$f_Y(y) = f_X(T^{-1}(y)) \left| \frac{dT^{-1}(y)}{dy} \right|. \quad (2)$$

Eine Voraussetzung des Satzes ist demnach die Injektivität von T . Eine Erweiterung des Transformationssatzes für den Fall einer nicht injektiven Abbildung T kann folgendermaßen beschrieben werden. Sei I_1, \dots, I_K eine Partition von \mathbb{R} , so dass die Abbildungen $T_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T_k(x) = T(x)$, $x \in I_k$, jeweils injektiv und stetig differenzierbar sind. Dann lässt sich zeigen, dass für die transformierte Dichte

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^K f_X(T_k^{-1}(y)) \left| \frac{dT_k^{-1}(y)}{dy} \right| \quad (3)$$

folgt.

- b) Finden Sie eine geeignete Partition von \mathbb{R} , so dass die Voraussetzung für die Erweiterung des Transformationssatzes für $P_r = T(U)$ erfüllt sind. Berechnen Sie die transformierte Dichte $f_{P_r}(p_r)$. Zeigen Sie weiterhin, dass es sich bei dem gefundenen Ausdruck tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie der Normalverteilung.

- c) Die Dichte einer Gamma-verteilten Zufallsvariablen Z lautet

$$f_Z(z) = \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\gamma z}, \quad z \geq 0, \gamma > 0, \quad (4)$$

wobei $\Gamma(\alpha)$ die sogenannte Gamma-Funktion ist. Einige charakteristische Werte dieser Funktion sind in folgender Tabelle gegeben.

α	$-3/2$	$-1/2$	$+1/2$	$+3/2$
$\Gamma(\alpha)$	$4/3\sqrt{\pi}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	$1/2\sqrt{\pi}$

Zeigen Sie, dass die Dichte $f_{P_r}(p_r)$ einer Gamma-Dichte entspricht.

- d) Für die Generatorspannung U wurde bisher Mittelwertfreiheit angenommen. Im Folgenden soll $U \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gelten, wobei μ als eine Art Sollspannung verstanden werden kann. Wie lautet jetzt die Dichte $f_{P_r}(p_r)$?