8. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

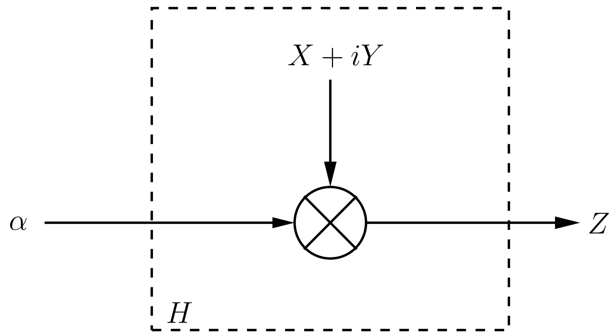
Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

18.12.2009

Aufgabe 1. Nach Übertragung des komplexen Eingangssymbols αüber einen Mobilfunkkanal H ohne Sichtverbindung zwischen Sender und Empfänger kann das Empfangssymbol als komplexe Zufallsvariable $Z = \alpha(X + iY)$ mit stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{N}(0, \tau^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(0, \tau^2)$ beschrieben werden, siehe Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass die Leistung $P = |Z|^2$ des empfangenen Symbols $\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2\tau^2|\alpha|^2}\right)$-verteilt ist.
Hinweis: Benutzen Sie den Transformationssatz.Verwenden Sie die Transformation auf Polarkoordinaten $T_1\colon (\mathrm{Re}(Z), \mathrm{Im}(Z)) \to (R, \phi)$. Wenden Sie das Ergebnis aus dem Skript an. Verwenden Sie dann die Transformation $T_2\colon R \to R^2$.

b) Liegt die empfangene Leistung P unterhalb eines Schwellwerts λ, so kann der Empfänger mit hoher Wahrscheinlichkeit das gesendete Symbol nicht mehr detektieren. Der Kanal ist dann in einem *deep fade*. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Kanal H in einem *deep fade*?



Aufgabe 2. Es seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ und $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

a) $\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}$

b) $\widehat{\boldsymbol{x}}'\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y})$

c) $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1} = \widehat{\boldsymbol{A}^{-1}}$

d) $\det \widehat{\boldsymbol{A}} = |\det \boldsymbol{A}|^2$

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe soll Proposition 2.6.5 aus dem Skript bewiesen werden.

Sei $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{Q})$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor. Zeigen Sie: Die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$ ist nicht-negativ definit. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ die quadratische Form $\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x}$ reell ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaft, dass $\boldsymbol{Q}$ hermitesch ist.

b) Zeigen Sie dann, dass für jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ die quadratische Form $\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x}$ nicht-negativ ist.
Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus **a)** und die Eigenschaften **a)** und **b)** aus Aufgabe 2.