# 9. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

08.01.2010

**Aufgabe 1.** Für komplexe Zufallsvektoren $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$ mit Erwartungswerten $\boldsymbol{\mu}_X$ und $\boldsymbol{\mu}_Y$ lauten die Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ bzw. die *Pseudo-Kovarianzmatrix* $\mathrm{PCov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = E((\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_X)(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\mu}_Y)^*) \text{ und}$$
$$\mathrm{PCov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = E((\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_X)(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\mu}_Y)').$$

Seien $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_r + i\boldsymbol{X}_i$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_r + i\boldsymbol{Y}_i$, $\boldsymbol{C} = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ und $\boldsymbol{P} = \mathrm{PCov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$.

**a)** Zeigen Sie

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_r,\boldsymbol{Y}_r) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{P}),\\
\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{P}),\\
\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_r) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{P}),\\
\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_r,\boldsymbol{Y}_i) &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{P}).
\end{aligned}$$

**b)** Zeigen Sie die folgende Aussage.
Die Kovarianzen aus **a)** sind genau dann alle $\mathbf{0}$, wenn $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P} = \mathbf{0}$ gilt.

Seien nun $U$, $V$ zwei stochastisch unabhängige, reelle Zufallsvariablen und $X = U + iV$ bzw. $Y = U - iV$.

**c)** Sind die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ unabhängig?

**d)** Berechnen Sie die Kovarianzen $\mathrm{Cov}(X,Y)$ und $\mathrm{PCov}(X,Y)$.

**e)** Sei nun $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(V) = \sigma^2$. Wie lauten dann $\mathrm{Cov}(X,Y)$ und $\mathrm{PCov}(X,Y)$? Interpretieren Sie das Ergebnis unter Berücksichtigung der Teilaufgaben **b)** und **c)**.

**Aufgabe 2.** Sei $\boldsymbol{X}$ zirkulär symmetrisch komplex verteilt mit Erwartungswert $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}$.

**a)** Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})'] = \mathrm{PCov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$ gilt.

**b)** Sei $X_l$ der $l$-te Eintrag des Vektors $\boldsymbol{X}$. Zeigen Sie, dass der Realteil $\mathrm{Re}(X_l)$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im}(X_l)$ unkorreliert sind.
**Hinweis:** Benutzen Sie das Ergebnis aus **a)**.

**c)** Sei $\boldsymbol{X}$ weiterhin zirkulär symmetrisch und nehme ausschließlich reelle Werte an. Wie ist $\boldsymbol{X}$ dann verteilt?

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie Proposition 2.6.8 der Vorlesung.

**a)** Sei $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dann gilt $\boldsymbol{AX} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{A\mu}, \boldsymbol{AQA}^*)$.

**b)** Seien $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{Q}_1)$ und $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{Q}_2)$ stochastisch unabhängig. Dann gilt $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2)$.

**Aufgabe 4.** Ein Sender sendet zufällig und unabhängig voneinander eine Folge von Zeichen 1 bzw. $-1$ der Länge $T$. Dieses Signal kann durch folgenden stochastischen Prozess beschrieben werden:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n h(t - nT)$$

mit der zeitdiskreten Folge von unabhängigen, Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen $A_n$, die mit Wahrscheinlichkeit $p$ den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ den Wert $-1$ annehmen, vgl. Abbildung. Ferner sei

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

**a)** Skizzieren Sie eine mögliche Realisierung dieses Prozesses.

**b)** Berechnen Sie die Erwartungswertfunktion $\mu_X(t)$.

**c)** Ist der Prozess stationär?

**d)** Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t_1, t_2)$ an den Stellen $t_1 = 0$ und $t_1 = T/2$ (also $R_{XX}(0, t_2)$ und $R_{XX}(T/2, t_2)$ in Abhängigkeit von $t_2$).

**e)** Ist der Prozess schwach stationär?

**f)** Berechnen Sie die erwartete Momentanleistung des Signals.

**g)** Berechnen Sie die erwartete Energie des Signals im Interval $[0, NT]$.