10. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

15.01.2010

Aufgabe 1. Es sei $\{X(t) \mid t > 0\}$ ein stochastischer Prozess mit der eindimensionalen Randverteilungsfunktion

$$F_{X(t)}(x) = P\left(X(t) \leq x\right) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{t}\right)^2\right\}, x \geq 0.$$

Berechnen und skizzieren Sie die Erwartungswertfunktion $\mu_X(t)$ des Prozesses. Ist der Prozess schwach stationär?

Aufgabe 2. Es sei $\{X(t) \mid t \in T\}$ ein stochastischer Prozess mit $T \subset \mathbb{R}$. Für beliebige Zeitpunkte $t_1, t_2 \in T$ sei die gemeinsame Dichte von $X(t_1)$ und $X(t_2)$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = 4\frac{x_1 x_2}{t_1^2 t_2^2} \exp\left\{-\left[\left(\frac{x_1}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{t_2}\right)^2\right]\right\}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion von $X(t)$. Ist der Prozess schwach stationär?

Aufgabe 3. Weißes Rauschen $\{W(t)\}$ mit der Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t) = 2\delta(t)$ werde mit einem Tiefpass mit Übertragungsfunktion

$$H(f) = \frac{1}{2B}\mathbb{I}_{[-B,B]}(f)$$

gefiltert. Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion und die erwartete Momentanleistung des gefilterten Prozesses.

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4. Die Fouriertransfomierte $H(f)$ der Impulsantwort $h(t)$ eines LTI-Systems sei gegeben durch

$$H(f) = \frac{1}{1 + i\sqrt{2}f - f^2}.$$

Beim Eingangssignal handele es sich um weißes Rauschen $\{W(t)\}$ mit der Autokorrelationsfunktion $R_{WW}(t) = \delta(t)$. Das Ausgangssignal sei $N(t) = (h * W)(t)$.

a) Berechnen und skizzieren Sie die spektralen Leistungsdichten $S_{WW}(f)$ und $S_{NN}(f)$.

b) Berechnen Sie die mittlere Leistung des Ausgangssignals.

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$.