11. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

22.01.2010

Aufgabe 1. Es sei

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & \text{falls } t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Impulsantwort eines LTI-Systems, $\alpha \in \mathbb{R}$. Das Eingangssignal des Systems sei ein schwach stationärer stochastischer Prozess $X(t)$ mit Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t)$. Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{YY}(t)$ und das Leistungsdichtespektrum $S_{YY}(f)$ des gefilterten Prozesses.

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie die Konvexität der Funktion $g(t) = t \cdot \log(t)$, $t \in \mathbb{R}_{++}$.

b) Für nichtnegative Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gilt die sogenannte Log-Sum-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \log \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} .$$

Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Ungleichung.

Hinweis: Verwenden Sie die Jensen-Ungleichung, die für konvexe Funktionen besagt

$$\sum_i \alpha_i f(t_i) \geq f\left(\sum_i \alpha_i t_i \right) .$$

Aufgabe 3. Gegeben sei eine Nachrichtenquelle X, welche die diskreten Symbole x_1, x_2, x_3 mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3 sendet. Bestimmen Sie die maximale Entropie $H(X)$ bezüglich der Symbolwahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3.

Hinweis: Benutzen Sie die Lagrange-Multiplikatorregel, d.h. maximieren Sie für $\lambda \in \mathbb{R}_-$ die Funktion

$$F(p_1, p_2, p_3) = H(X) + \lambda \Big(\sum_{i=1}^{3} p_i - 1 \Big).$$