

## 13. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

05.02.2010

**Aufgabe 1.** Es seien  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$  ein Quellalphabet,  $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_d\}$  ein Kodealphabet und  $g$  ein eindeutig dekodierbarer Kode. Für  $j = 1, \dots, m$  bezeichne  $P(X = x_j) = p_j$  die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Quellbuchstabens  $x_j$  und  $n_j$  bezeichne die Länge des Kodeworts  $g(x_j)$ . Zeigen Sie (z.B. mit der Ungleichung von McMillan), dass für die erwartete Kodewortlänge  $\bar{n}(g)$  gilt:

$$\bar{n}(g) = \frac{H(X)}{\log d} \Leftrightarrow p_j = d^{-n_j} \text{ für alle } j = 1, \dots, m \text{ mit } p_j > 0.$$

**Aufgabe 2.** Gegeben sei ein gedächtnisloser binärer symmetrischer Kanal mit Ein- und Ausgabealphabet  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ . Die Menge der Eingabewörter sei  $\mathcal{C} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ . Dabei trete  $(0, 0, 0)$  mit Wahrscheinlichkeit  $1/4$  sowie  $(1, 1, 1)$  mit Wahrscheinlichkeit  $3/4$  auf. Ferner sei  $\epsilon = 1/3$ .

- Welche Ausgabewörter sind bei der Übertragung im Kanal möglich und wie groß sind deren Auftrittswahrscheinlichkeiten?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $p_K$  für die fehlerfreie Übertragung eines Eingabeworts?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $p_E$  dafür, ein Element aus  $\mathcal{C}$  zu empfangen, das nicht gesendet wurde?
- Geben Sie eine ML-Dekodierung  $h_{ML} : \mathcal{Y}^3 \rightarrow \mathcal{C}$  an.
- Geben Sie eine ME-Dekodierung  $h_{ME} : \mathcal{Y}^3 \rightarrow \mathcal{C}$  an.

**Aufgabe 3.** Gegeben seien ein binärer symmetrischer Kanal mit Ein- und Ausgabealphabet  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$  und Fehlerwahrscheinlichkeit  $\epsilon = 0.1$ . Zur Übertragung wird ein  $(M, N)$ -Kode mit  $M$  Kodewörtern der Länge  $N$  angewendet.

- Bestimmen Sie die Kapazität des Kanals.
- Gibt es eine Folge von  $(2^{0.6N}, N)$ -Kodes,  $N \in \mathbb{N}$ , welche die Annahme des Shannonschen Fundamentalsatzes erfüllt?
- Die Quelle übermittle  $R$  Symbole pro Zeiteinheit und habe  $2^K$  Kodewörter der Länge  $N$ . Geben Sie eine Bedingung für  $N$  (in Abhängigkeit von  $R$  und  $K$ ) an, so dass die Annahme des Shannonschen Fundamentalsatzes erfüllt wird.