4. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Daniel Bielefeld

12.11.2010

Aufgabe 1. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz folgender Zufallsvariablen X:

a) X sei Poisson-verteilt, d.h. $X \sim \text{Poi}\,(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Hinweis: Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion lautet $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, wobei $0! = 1$ gilt.

b) X sei exponentialverteilt, d.h. $X \sim \text{Exp}\,(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Aufgabe 2.

a) Es seien X und Y zwei nicht weiter spezifizierte Zufallsvariablen. Zeigen Sie die Gültigkeit der aus Proposition 2.3.9 d) bekannten Beziehungen

i) $\text{Var}(X) = \text{E}[(X - \text{E}(X))^2] = \text{E}(X^2) - [\text{E}(X)]^2$

ii) $\text{Cov}(X, Y) = \text{E}[(X - \text{E}(X))(Y - \text{E}(Y))] = \text{E}(XY) - \text{E}(X)\,\text{E}(Y)$.

b) Die Kovarianzmatrix ist definiert als $\mathbf{C} = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei alle $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ Zufallsvariablen sind. Geben Sie diese Matrix für den n-dimensionalen Fall explizit an. Verwenden sie dafür die in Aufgabenteil **a)** angegebenen Beziehungen. Ist die Kovarianzmatrix symmetrisch?

c) Ein zweidimensional normalverteilter Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ werde durch folgende Dichte beschrieben

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{2}{3}(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)\right) .$$

Berechnen Sie den Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ sowie die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}$ des Zufallsvektors $\mathbf{X}$. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Matrix $\mathbf{C}$ invertierbar ist und $\det(\mathbf{C}) > 0$ gilt.

d) Wenn ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ zweidimensional normalverteilt ist, dann folgt daraus jeweils die eindimensionale Normalverteilung der Zufallsvariablen X_1 und X_2. Geben Sie auf Basis dieser Beziehung die Randverteilungsdichten $f_{X_1}(x_1)$ und $f_{X_2}(x_2)$ an.

e) Lässt sich umgekehrt aus der Kenntnis der eindimensionalen Randverteilungsdichten auf die n-dimensionale gemeinsame Verteilungsdichte schließen?