6. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Daniel Bielefeld

26.11.2010

Aufgabe 1. Ein typisches stochastisches Modell zur Modellierung eines Funkkanals ohne direkte Sichtverbindung ist der Rayleigh-Fading Kanal. Wie aus der Vorlesung bekannt, kann ein zeitdiskreter Rayleigh-Fading Kanal durch

$$h_k = |h_k| \exp(i\phi_k)$$

beschrieben werden, wobei

- $|h_k|$ die Amplitude mit der Verteilungsdichte

$$f_{|h_k|}(|h_k|) = \frac{2|h_k|}{\sigma_h^2} \exp\left(-\frac{|h_k|^2}{\sigma_h^2}\right) \mathbb{I}_{[0,\infty)}(|h_k|)$$

- und ϕ_k die Phase mit der Verteilungsdichte

$$f_{\phi_k}(\phi_k) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{I}_{[0,2\pi)}(\phi_k)$$

  ist. Hier bezeichnet der Index k einen beliebigen Zeitpunkt.

Die Zufallsvariablen $|h_k|$ und ϕ_k sind stochastisch unabhängig.

a) Berechnen Sie die Verteilungsdichtefunktion von $|h_k|^2$. Um welche Art von Verteilung handelt es sich?

Durch folgende Beziehung sei der Ausgang y_k eines Funkkanals im komplexen Basisband beschrieben:

$$y_k = h_k \cdot x_k + n_k.$$

Hierbei ist n_k additives Rauschen. Wie auch der Kanal h_k ist n_k eine komplexe Größe, d.h.,

$$n_k = n_{R_k} + i \cdot n_{I_k}$$

mit dem Realteil n_{R_k} und dem Imaginärteil n_{I_k}. Die Zufallsvariablen n_{R_k} und n_{I_k} seien stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit der Verteilungsdichtefunktion

$$f_{n_{R_k}}(z) = f_{n_{I_k}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_n^2}\right).$$

Des Weiteren ist x_k das Signal am Kanaleingang. Es hat die mittlere Leistung σ_x^2.

b) Berechnen Sie die den Erwartungswert des Signal-zu-Rauschverhältnisses, welches folgendermassen definiert ist:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\mathrm{E}\left[|h_k \cdot x_k|^2\right]}{\mathrm{E}\left[|n_k|^2\right]}.$$

c) Nehmen Sie nun an, dass die verwendeten Sendesymbole eine konstante Amplitude haben (PSK-Modulation, *Phase-Shift-Keying*), d.h. $|x_k|^2 = \sigma_x^2$. Gilt folgende Gleichung?

$$\frac{\mathrm{E}\left[|h_k \cdot x_k|^2\right]}{\mathrm{E}\left[|n_k|^2\right]} = \mathrm{E}\left[\frac{|h_k \cdot x_k|^2}{|n_k|^2}\right]$$

d) Typischerweise ändert sich die Realisierung des Fadings nicht unabhängig von einem Zeitpunkt zum nächsten. Somit sind zwei aufeinanderfolgende Kanalrealisierungen h_k und h_{k+1} korreliert. Wir nehmen an, dass sowohl für den Realteil h_{R_k}, als auch für den Imaginärteil h_{I_k} von h_k, d.h.

$$h_k = h_{R_k} + i \cdot h_{I_k}$$

die Zeitpunkte k und $k+1$ wie folgt korreliert sind:

$$\mathrm{E}\left[h_{R_k} h_{R_{k+1}}\right] = \mathrm{E}\left[h_{I_k} h_{I_{k+1}}\right] = c.$$

Darüberhinaus nehmen wir an, dass die Eingangssymbole eine konstante Amplitude σ_x und eine unabhängige Phase von Symbol zu Symbol haben. Ist in diesem Fall die der Zufallsvektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_{R_1} \\ y_{I_1} \\ y_{R_2} \\ y_{I_2} \end{pmatrix}$$

gemeinsam normalverteilt?