6. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Anke Schmeink, Fabian Altenbach, Martijn Arts, Christoph Schmitz

16.11.2012

Aufgabe 1.

a) Es seien X und Y zwei absolut-stetige Zufallsvariablen. Geben Sie die Randdichten von $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ und die bedingten Dichten $f_{X|Y}(x|y)$ und $f_{Y|X}(y|x)$ auschließlich in Abhängigkeit von der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}(x,y)$ an.

b) Die gemeinsame Dichte lautet

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2\exp(-(x+y)) & 0 \leq y \leq x\,,\ x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die zugehörige bedingte Dichte $f_{Y|X}(y|x)$.

Aufgabe 2. Die Zeitdauer x bis zum Ausfall einer technischen Komponente wird durch eine exponential-verteilte Zufallsvariable X beschrieben. Der Erwartungswert $1/\lambda_X$ gibt dabei die mittlere Zeit bis zum Ausfall an.

Wenn die erste Komponente ausfällt, dann soll umgehend eine Ersatzkomponente den Betrieb übernehmen. Die Ersatzkomponente muss jedoch während der Lebensdauer der ersten Komponente unbenutzt verweilen, so dass sich die Ausfallwahrscheinlichkeit mit steigender Laufzeit x der ersten Komponente erhöht. Dieser Zusammenhang wird modelliert durch eine Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = \lambda_X(1+\alpha x)$, wobei $0 < \alpha < 1$ gilt.

a) Interpretieren Sie den Parameter $1/\lambda$.

b) Die Zufallsvariable Y beschreibt die Nutzungsdauer der Ersatzkomponente. Geben Sie die Dichten von $f_X(x)$ und $f_{Y|X}(y|x)$ an. Berechnen Sie damit die Dichte von $f_Y(y)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.

a) Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Der Träger von X ist $T_X = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie unter Anwendung des Transformationssatzes die Dichte von $Y = aX + b$, wobei $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ und $b \in \mathbb{R}$.

b) Es sei nun $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, d.h. X ist standardnormalverteilt. Wie lautet die Transformation, so dass $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt?

c) Es sei erneut $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Bestimmen Sie nun die Dichte der Zufallsvariablen $Z = e^X$. Wie lautet der Träger von Z?