7. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Anke Schmeink, Martijn Arts, Fabian Altenbach, Christoph Schmitz

30.11.2012

Aufgabe 1. Zeigen Sie die Faltungsstabilität von Normalverteilungen (vgl. Proposition 2.4.15 b) im Skript). Betrachten Sie dazu zwei stochastisch unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$. Verwenden Sie zur Lösung der Aufgabe den Transformationssatz und die Fourier-Transformation.

a) Nehmen Sie zunächst an, dass beide Erwartungswerte gleich Null sind.
Hinweis: Die Fourier-Transformation lautet $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx$.
Verwenden Sie, dass: $f(x) = e^{-\alpha x^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{(\pi\xi)^2}{\alpha}}$ für $a > 0$.

b) Zeigen Sie nun die Verallgemeinerung für Erwartungswerte ungleich Null, indem Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil a) verwenden.

Aufgabe 2. Die Friis-Gleichung für Freiraumausbreitung von elektromagnetischen Wellen lautet in vereinfachter Form

$$P_r(d) = P_t \cdot \frac{G_t G_r \lambda^2}{(4\pi d)^2} > 0\,, \tag{1}$$

wobei P_t und $P_r(d)$ die Leistung am Sender bzw. Empfänger modellieren. Die weiteren Größen, insbesondere die Distanz d zwischen Sender und Empfänger, werden im Folgenden als konstant angenommen. Am Sender wird die Leistung gemäß $P_t = U^2/R$ durch einen Generator erzeugt, wobei U eine reelle Spannung und R ein konstanter ohmscher Widerstand sind. Durch technische Ungenauigkeiten unterliegt diese Spannung zufälligen Schwankungen. Die Spannung U wird zunächst als Realisierung einer mittelwertfreien, normalverteilten Zufallsvariablen $U \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ angenommen.

a) Formulieren Sie die Transformation $P_r = T(U) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Welche Voraussetzung des Transformationssatzes für Dichten ist verletzt?

In der Vorlesung wurde der Transformationssatz für Dichten eingeführt. Für eine invertierbare Abbildung $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ und eine reelle Zufallsvariable X ist die transformierte Dichte der Zufallsvariablen $Y = T(X)$ gegeben durch

$$f_Y(y) = f_X(T^{-1}(y)) \left| \frac{dT^{-1}(y)}{dy} \right| . \tag{2}$$

Eine Voraussetzung des Satzes ist demnach die Injektivität von T. Eine Erweiterung des Transformationssatzes für den Fall einer nicht injektiven Abbildung T kann folgendermaßen beschrieben werden. Sei $I_1, \dots, I_K$ eine Partition von $\mathbb{R}$, so dass die Abbildungen $T_k : I_k \to \mathbb{R}$ mit $T_k(x) = T(x)$, $x \in I_k$, jeweils injektiv und stetig differenzierbar sind. Dann lässt sich zeigen, dass für die transformierte Dichte

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{K} f_X(T_k^{-1}(y)) \left| \frac{dT_k^{-1}(y)}{dy} \right| \tag{3}$$

folgt.

b) Finden Sie eine geeignete Partition von $\mathbb{R}$, so dass die Voraussetzung für die Erweiterung des Transformationssatzes für $P_r = T(U)$ erfüllt sind. Berechnen Sie die transformierte Dichte $f_{P_r}(p_r)$. Zeigen Sie weiterhin, dass es sich bei dem gefundenen Ausdruck tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.
Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie der Normalverteilung.

c) Die Dichte einer Gamma-verteilten Zufallsvariablen Z lautet

$$f_Z(z) = \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\gamma z}\,,\ z \geq 0, \gamma > 0, \tag{4}$$

wobei $\Gamma(\alpha)$ die sogenannte Gamma-Funktion ist. Einige charakteristische Werte dieser Funktion sind in folgender Tabelle gegeben.

α	$-3/2$	$-1/2$	$+1/2$	$+3/2$
$\Gamma(\alpha)$	$4/3\sqrt{\pi}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	$1/2\sqrt{\pi}$

Zeigen Sie, dass die Dichte $f_{P_r}(p_r)$ einer Gamma-Dichte entspricht.

d) Für die Generatorspannung U wurde bisher Mittelwertfreiheit angenommen. Im Folgenden soll $U \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gelten, wobei μ als eine Art Sollspannung verstanden werden kann. Wie lautet jetzt die Dichte $f_{P_r}(p_r)$?