9. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Anke Schmeink, Fabian Altenbach, Martijn Arts, Christoph Schmitz

14.12.2012

Aufgabe 1. Es seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ und $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

a) $\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}$

b) $\widehat{\boldsymbol{x}}'\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y})$

c) $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1} = \widehat{\boldsymbol{A}^{-1}}$

d) $\det \widehat{\boldsymbol{A}} = |\det \boldsymbol{A}|^2$

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe soll Proposition 2.6.5 aus dem Skript bewiesen werden. Sei $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{Q})$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor. Zeigen Sie: Die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$ ist positiv definit. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ die quadratische Form $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ reell ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaft, dass $\boldsymbol{Q}$ hermitesch ist.

b) Zeigen Sie dann, dass für jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n_{\neq \boldsymbol{0}}$ die quadratische Form $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ positiv definit ist.
Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus **a)** und die Eigenschaften **a)** und **b)** aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3. Beweisen Sie Proposition 2.6.8 der Vorlesung.

a) Sei $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dann gilt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^*)$.

b) Seien $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{Q}_1)$ und $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{Q}_2)$ stochastisch unabhängig. Dann gilt $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2)$.