12. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Anke Schmeink, Martijn Arts, Fabian Altenbach, Christoph Schmitz

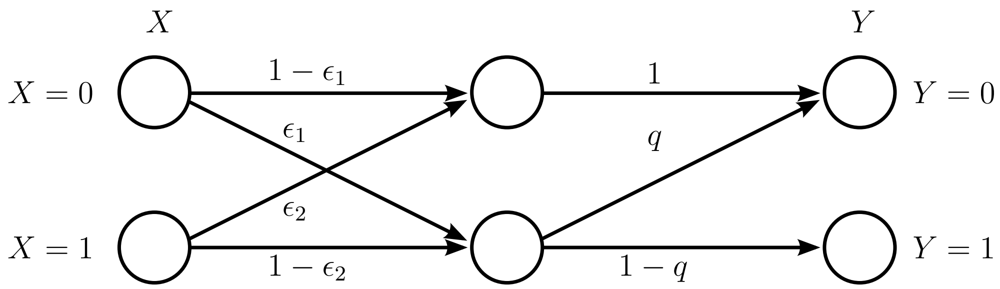
25.01.2013

Aufgabe 1. Gegeben sei eine Nachrichtenquelle X, welche die diskreten Symbole x_1, x_2, x_3 mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3 sendet. Bestimmen Sie die maximale Entropie $H(X)$ bezüglich der Symbolwahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3.

Hinweis: Benutzen Sie die Lagrange-Multiplikatorregel, d.h. maximieren Sie für $\lambda \in \mathbb{R}_-$ die Funktion

$$F(p_1, p_2, p_3) = H(X) + \lambda\Big(\sum_{i=1}^{3} p_i - 1\Big).$$

Aufgabe 2. Gegeben sei folgender binärer Kanal:



Die Parameter ϵ_1, ϵ_2 und q liegen jeweils im Intervall $[0, 0.5]$ und es gelte ferner $\epsilon_1 > \epsilon_2$.

a) Bestimmen Sie q so, dass der Gesamtkanal symmetrisch ist.

b) Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten des binären symmetrischen Kanals, der zum Gesamtkanal aus a) äquivalent ist, in Abhängigkeit von ϵ_1 und ϵ_2.

c) Berechnen Sie die Transinformation $\mathrm{I}(X;Y)$ des binären symmetrischen Kanals aus b). Nehmen Sie dazu an, dass die Symbole am Kanaleingang gleichwahrscheinlich auftreten und die Fehlerwahrscheinlichkeiten $\epsilon_1 = 0.02$ und $\epsilon_2 = 0.01$ betragen.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. Die diskreten Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien identisch verteilt aber nicht notwendigerweise unabhängig. Ferner sei

$$\rho = 1 - \frac{H(X_2|X_1)}{H(X_1)}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\rho = \frac{I(X_1;X_2)}{H(X_1)}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $0 \leq \rho \leq 1$ gilt.

c) In welchem Fall gilt $\rho = 0$?