3. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

7.11.2014

Aufgabe 1. Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y. Die *Varianz* von X ist definiert als $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^2]$. Weiterhin ist die *Kovarianz* von X und Y gegeben durch $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))]$. Zeigen Sie unter Verwendung der Eigenschaften des Erwartungswerts die folgenden Identitäten:

a) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$,

b) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen X für

a) $X \sim \mathrm{Poi}\,(\lambda)\,, \lambda > 0$,
Hinweis: Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion lautet $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, wobei $0! = 1$ gilt.

b) $X \sim \mathrm{Geo}\,(p)\,, p \in (0, 1]$,

c) $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.
Hinweis: Benutzen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.