4. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

14.11.2014

Aufgabe 1. Zwei Freunde A und B verabreden, sich abends am Markt zu treffen. A kommt zu einem zufälligen Zeitpunkt zwischen 21 Uhr und 22 Uhr an und wartet 15 Minuten auf B. B kommt zwischen 20:30 Uhr und 22:30 Uhr an und wartet 30 Minuten. Beide Ankunftszeiten können als gleichverteilt in den oben angegebenen Intervallen und als stochastisch unabhängig angenommen werden.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit begegnen sich die beiden?

Aufgabe 2.

a) Die Kovarianzmatrix ist definiert als $\boldsymbol{C} = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei alle $(X_i)_{1 \le i \le n}$ Zufallsvariablen sind. Geben Sie diese Matrix für den n-dimensionalen Fall explizit an. Verwenden sie dafür die Beziehungen aus Proposition 2.3.9d) aus dem Skript. Ist die Kovarianzmatrix symmetrisch?

b) Ein zweidimensional normalverteilter Zufallsvektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ werde durch folgende Dichte beschrieben

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{2}{3}(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)\right).$$

Berechnen Sie den Erwartungswertvektor μ sowie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}$ des Zufallsvektors $\boldsymbol{X}$. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Matrix $\boldsymbol{C}$ invertierbar ist und $\det(\boldsymbol{C}) > 0$ gilt.

c) Wenn ein Zufallsvektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ zweidimensional normalverteilt ist, dann folgt daraus jeweils die eindimensionale Normalverteilung der Zufallsvariablen X_1 und X_2. Geben Sie auf Basis dieser Beziehung die Randverteilungsdichten $f_{X_1}(x_1)$ und $f_{X_2}(x_2)$ an.

d) Lässt sich umgekehrt aus der Kenntnis der eindimensionalen Randverteilungsdichten auf die n-dimensionale gemeinsame Verteilungsdichte schließen?