5. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

21.11.2014

Aufgabe 1. Die Zeitdauer x bis zum Ausfall einer technischen Komponente wird durch eine exponential-verteilte Zufallsvariable X beschrieben. Der Erwartungswert $1/\lambda_X$ gibt dabei die mittlere Zeit bis zum Ausfall an.

Wenn die erste Komponente ausfällt, dann soll umgehend eine Ersatzkomponente den Betrieb übernehmen. Die Ersatzkomponente muss jedoch während der Lebensdauer der ersten Komponente unbenutzt verweilen, so dass sich die Ausfallwahrscheinlichkeit mit steigender Laufzeit x der ersten Komponente erhöht. Dieser Zusammenhang wird modelliert durch eine Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = \lambda_X(1 + \alpha x)$, wobei $0 < \alpha < 1$ gilt.

a) Interpretieren Sie den Parameter $1/\lambda$.

b) Die Zufallsvariable Y beschreibt die Nutzungsdauer der Ersatzkomponente. Geben Sie die Dichten von $f_X(x)$ und $f_{Y|X}(y|x)$ an. Berechnen Sie damit die Dichte von $f_Y(y)$.

Aufgabe 2.

a) Es seien X_1, X_2 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, jeweils $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$-verteilt. Zeigen Sie, dass gilt $X_1^2 + X_2^2 \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Dichte von X_1^2 und nutzen Sie dann Theorem 2.4.14 der Vorlesung.

b) Bemerkung: Eine Zufallsvariable X heißt Cauchy-verteilt, wenn

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \mu)^2},\ \lambda > 0,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Es seien X_1, X_2 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$. Zeigen Sie, dass $\frac{X_1}{X_2}$ Cauchy-verteilt ist mit $\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sqrt{1 - r^2}$, $\mu = r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, wobei $r := \sigma_{12}^2/(\sigma_1^2\sigma_2^2)$, $\sigma_{12} := \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Hinweis: Nutzen Sie Beispiel 2.4.4 der Vorlesung zur Berechnung der Dichte von (X_1, X_2) und wenden Sie Theorem 2.4.12 an. Sie können voraussetzen, dass $x_2 \neq 0$ gilt.