9. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

09.01.2015

Aufgabe 1. Ein Sender sendet zufällig und unabhängig voneinander eine Folge von Zeichen 1 bzw. -1 der Länge T. Dieses Signal kann durch folgenden stochastischen Prozess beschrieben werden:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n h(t - nT)$$

mit der zeitdiskreten Folge von unabhängigen, Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen A_n, die mit Wahrscheinlichkeit p den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ den Wert -1 annehmen, vgl. Abbildung. Ferner sei

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Skizzieren Sie eine mögliche Realisierung dieses Prozesses.

b) Berechnen Sie die Erwartungswertfunktion $\mu_X(t)$.

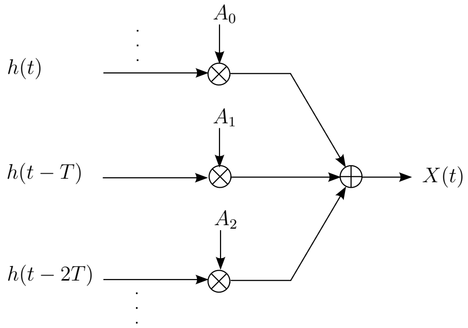
c) Ist der Prozess strikt stationär?

d) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t_1, t_2)$ an den Stellen $t_1 = 0$ und $t_1 = T/2$ (also $R_{XX}(0, t_2)$ und $R_{XX}(T/2, t_2)$ in Abhängigkeit von t_2).

e) Ist der Prozess schwach stationär?

f) Berechnen Sie die erwartete Momentanleistung des Signals.

g) Berechnen Sie die erwartete Energie des Signals im Interval $[0, NT]$.



Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für das Leistungsdichtespektrum eines schwach stationären, reellwertigen stochastischen Prozesses $\{X(t)\}$ gilt:

$$S_{XX}(f) = S_{XX}(-f).$$

Aufgabe 3. $\{X(t) \mid t \in T\}$ sei ein reellwertiger, stationärer Gaussprozess mit Erwartungswertfunktion $\mu_X(t) \equiv 0$ und Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t)$. Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $Y(t) = X^2(t)$ die Autokorrelationsfunktion

$$R_{YY}(t) = R_{XX}^2(0) + 2R_{XX}^2(t)$$

besitzt.
Hinweis: Sind X_1, X_2 normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0, so gilt

$$\mathrm{E}\left(X_1^2 X_2^2\right) = \mathrm{E}\left(X_1^2\right) \mathrm{E}\left(X_2^2\right) + 2\,\mathrm{E}^2\left(X_1 X_2\right).$$