

5. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Daniel Bielefeld, Tobias Rick

03.05.2007

Aufgabe 49. Seien $n \in \mathbb{N}$, $L > 0$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Zeigen Sie, dass das Optimierungsproblem

$$\max_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+} \prod_{i=1}^n (x_i + \lambda_i), \text{ so dass } \sum_{i=1}^n x_i \leq nL$$

die Lösung $x_i = (\nu - \lambda_i)^+$ besitzt, wobei ν die eindeutige Lösung ist von

$$\sum_{i=1}^n (\nu - \lambda_i)^+ = nL.$$

Hinweis: Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

- Zeigen Sie, dass für jede optimale Lösung (x_1, \dots, x_n) gilt
 - (i) $\sum_{i=1}^n x_i = nL$,
 - (ii) $x_i + \lambda_i = x_j + \lambda_j$ für alle $x_i, x_j > 0$.
- Folgern Sie $x_i = (\nu - \lambda_i)^+$ für alle i und $\sum_{i=1}^n (\nu - \lambda_i)^+ = nL$.

Aufgabe 50. Für die Datenübertragung von einem Server zu einem Clientrechner stehen drei parallele Leitungen zur Verfügung. Da die Leitungen in einem Kabelkanal verlegt sind, ist das normalverteilte additive Rauschen auf den Leitungen korreliert und besitzt die Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 23 & -1 & -10 \\ -1 & 23 & -10 \\ -10 & -10 & 32 \end{pmatrix}.$$

Der Server kann mit einer maximalen Sendeleistung von $L = 8$ senden, wobei die Leistung beliebig auf die Leitungen verteilt werden kann.

- a) Wie groß ist die Kapazität des Kanals bestehend aus den drei Leitungen?
- b) Für welche Inputverteilung wird die Kapazität angenommen?
- c) Wie verändert sich die Kapazität, wenn die Leitungen als drei unabhängige reelle Gaußkanäle mit Leistungsbeschränkung $L' = \frac{1}{3}L$ aufgefasst werden?