

3. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Daniel Bielefeld, Georg Böcherer

24.04.2008

Aufgabe 1. Bestimmen Sie $I(X, Y)$, $H(X|Y)$, und $H(Y|X)$ für

$$(X, Y) \sim N_2 \left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

mit $-1 < \rho < 1$.**Aufgabe 2.** Ein Übertragungssystem sei gegeben durch

$$Y = X + Z.$$

Die Eingabe X nimmt die Werte $x_1 = A$ und $x_2 = -A$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ an und für das Rauschen gilt $Z \sim N(0, 1)$. Es soll ein Ausdruck für die Transinformation zwischen X und Y hergeleitet werden. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie:

$$f_{Y|X}(y|X = x) = f_Z(y - x)$$

(b) Zeigen Sie:

$$H(Y|X) = H(Z)$$

(c) Berechnen Sie f_Y in Abhängigkeit von f_Z .(d) Sei $\varphi_i = f_Z(y - x_i)$. Zeigen Sie:

$$I(X; Y) = D \left(\varphi_1 \parallel \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varphi_i \right)$$

Aufgabe 3. Sei $Y = X + Z_1 + Z_2$ ein additiver Gaußkanal mit der Leistungsbeschränkung $E(X^2) \leq L$ und den Rauschtermen $Z_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$ und $Z_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$. Die Zufallsvariablen X, Z_1, Z_2 seien stochastisch unabhängig. Wie groß ist die Kapazität des Kanals und für welche Eingangsverteilung wird sie erreicht?